Felicitas Thorne

Lösungsvorschlag zu den Übungsaufgaben für Donnerstag, den 26.2.2008

1 Übungen zum Stoff der Donnerstagsvorlesung

1.1 Aufgabe 1

Magnetischer Fluss:

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{A} = B \cdot N \cdot A \cdot \cos\varphi\left(t\right)$$

Dabei ist $\varphi\left(t\right)$ der zeitabhängige Winkel zwischen Magnetfeld und Spulennormale. Mit $\varphi\left(t\right) = \omega \cdot t$ folgt:

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi = B \cdot N \cdot A \cdot \omega \sin \omega t$$

1.2 Aufgabe 2

a) Kirchhoffsche Regeln ergeben folgende Differentialgleichung:

$$U_0 = I \cdot R - U_{ind} = I \cdot R - L\frac{dI}{dt}$$

Lösungsansatz

$$I\left(t\right) = A \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + I_0$$

mit der Anfangsbedingung $I\left(0\right) = 0$ ergibt:

$$I\left(t\right) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

b) 63% bedeutet, dass der Strom auf $\frac{1}{e}$ abgefallen ist. Also:

$$\frac{R}{L}t = 1 \Rightarrow t = \frac{L}{R}$$

1.3 Aufgabe 3

a) Der Strom $I_2\left(t\right)$ der bei geöffnetem Schalter durch die Glühbirne fließt, wurde bereits in der Vorlesung hergeleitet:

$$I_2\left(t\right) = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

mit $R = R_1 + R_2$. Für die Induktionsspannung folgt mit $U_0 = I_0 R_2$:

$$U_{ind} = -I_2\left(R_1 + R_2\right) = -L\frac{dI_2}{dt}$$

$$U_{ind} = -U_0\frac{R_1 + R_2}{R_2}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

b) Aus a) folgt, dass für $R_1 >> R_2$ die Induktionsspannung wesentlich größer als U_0 wird.

1.4 Aufgabe 4

Magnetfeld einer Langen, geraden Spule:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I$$

Daraus folgen der magnetische Fluss

$$\Phi = B \cdot A = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I \cdot A$$

und die Induktionsspannung

$$U_{ind} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 n^2 l A \cdot \frac{dI}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Also:

$$L = \mu_0 n^2 V$$

1.5 Aufgabe 5

a) Ampèresches Gesetz in differentieller Form:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Integration über die Fläche und Anwendung des Satzes von Stokes liefert das gesuchte Ergebnis.
b) Die Ladungserhaltung wird durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0$$

ausgedrückt. Betrachtet man die beiden inhomogenen Maxwellgleichungen mit noch unbekanntem Verschiebungsstrom $\vec{X}$:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{H} + \vec{X} = \vec{j}$$

und addiert die Zeitableitung der ersten zur Divergenz der zweiten, dann erhält man:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{X} = 0$$

Dabei wurde schon angewendet, dass die Divergenz einer Rotation verschwindet und partielle Ableitungen vertauscht werden können.
Durch Vergleich sieht man:

$$\vec{X} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

1.6 Aufgabe 6

Da $\mathrm{rot}\vec{E} \neq 0$, kann $\vec{E}$ nicht mehr als Gradient eines skalaren Potentials geschrieben werden. Aus den Maxwellgleichungen findet man jedoch:

$$\mathrm{rot}\vec{E} + \dot{B} = \mathrm{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Also:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\phi$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Setzt man diese Formel in die Gleichung div$\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ein und verwendet die Lorentzeichung, so ergibt sich sofort:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Jetzt setzt man die Formel für $\vec{E}$ in rot$\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ ein und verwendet sowohl die Lorentzeichung, als auch die Rechenregel rot rot = grad div - Δ kommt man auf

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}$$

1.7 Aufgabe 7

a) Magnetfeld zwischen den Rohren:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Damit ist der magnetische Fluss:

$$\Phi = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} B \cdot dr = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Dies ergibt eine Induktivität pro m Kabellänge von:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

b) Energiedichte:

$$w(r) = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi r^2}$$

Daraus folgt die Energie:

$$W = \int w\, dV = 2\pi l\int_{R_1}^{R_2} w(r)\ dr = \frac{1}{2}LI^2$$

c) Wenn die Wanddicke nicht vernachlässigbar ist, muss noch das Magnetfeld im Innenleiter mit berücksichtigt werden.

1.8 Aufgabe 8

Die Herleitung geht analog zur Vorlesung:

$$I = \frac{U_a}{R} = \frac{U_e}{R_{ges}}$$

mit

$$R_{ges} = R + \imath\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

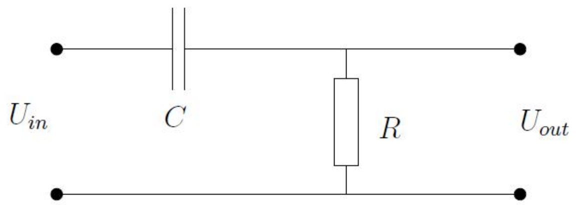
ergibt sich:

$$|U_a| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot |U_e|$$

Bei der Resonanzfrequenz muss die Ausgangs- gleich der Eingangsspannung sein, also

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

1.9 Aufgabe 9



a)
b) Ausgangsspannung: $U_{out} = RI$
Mit $I = \dot{Q}$ und sinusförmiger Eingangsspannung folgt für die Ladung:

$$R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U_0 \sin \omega t$$

Lösungsansatz:

$$Q(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

in die Differentialgleichung einsetzen und Additionstheoreme anwenden ergibt:

$$\cos \omega t \left(R\omega \cos \varphi + \frac{1}{C} \sin \varphi \right) + \sin \omega t \left(-R\omega \sin \varphi + \frac{1}{C} \cos \varphi \right) = \frac{U_0}{A} \sin \omega t$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$R\omega \cos \varphi + \frac{1}{C} \sin \varphi = 0$$

$$-R\omega \sin \varphi + \frac{1}{C} \cos \varphi = \frac{U_0}{A}$$

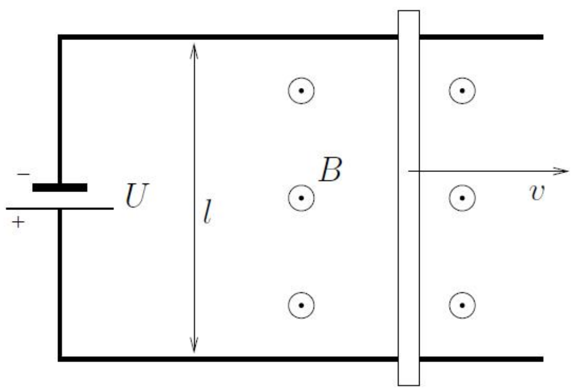
Diese Gleichungen müssen quadriert und dann addiert werden, um A bestimmen zu können. Die Lösung lautet dann:

$$Q(t) = \frac{U_0 C}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} \sin(\omega t + \varphi)$$

und

$$U_{out} = R\dot{Q} = \frac{U_0 C R \omega}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} \cos(\omega t + \varphi)$$

1.10 Aufgabe 10



a)
b) Es gibt zwei Möglichkeiten, die Induktionsspannung zu berechnen:
1) Lorentkraft: $U_{ind} = El = vBl$
2) Induktionsgesetz: $U_{ind} = \dot{\phi} = \frac{d}{dt}(slB) = vlB$
Der Strom im Draht berechnet sich über die Lenzsche Regel:

$$I = \frac{U - vBl}{R}$$

c) Bewegungsgleichung:

$$m\dot{v} = Q v_D B$$

Die rechte Seite ist die Lorentz-Kraft,die auf die mit der Driftgeschwindigkeit v_D durch den Draht driftenden Ladungsträger wirkt. Mit

$$I = \frac{Q}{l} v_D$$

erhält man

$$m\dot{v} = BIl$$

Einsetzten der in b) gefunden Formel für den Strom ergibt die folgende Differentialgleichung:

$$\dot{v} + \frac{B^2 l^2}{mR} v = \frac{Bl}{mR} U$$

mit der Lösung:

$$v(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{B^2 l^2 t}{mR}} + \frac{U}{Bl}$$

Verarbeiten der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ liefert:

$$v(t) = \frac{U}{Bl} \left(1 - \mathrm{e}^{-B^2 l^2 t} mR\right)$$

und

$$v_\infty = \frac{U}{Bl}$$

d) Mit der Formel aus b) folgt $I_\infty = 0$.

1.11 Aufgabe 11

a) DieStromzunahme $\dot{I}$ an der Spule ist mit der an ihr anliegenden Spannung U_L verknüpft durch

$$L\dot{I} = U_L$$

Dabei ist U_L die Spannung U der Batterie, vermindert um den im Widerstand abfallenden Anteil: $U_L = U - RI$. Zusammen ergibt sich also:

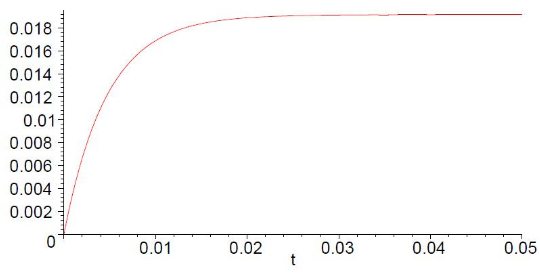
$$\dot{I} + \frac{R}{L} I = \frac{U}{L}$$

Dies ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung die Summe der allgemeinen homogenen Lösung und einer speziellen inhomogenen Lösung ist:

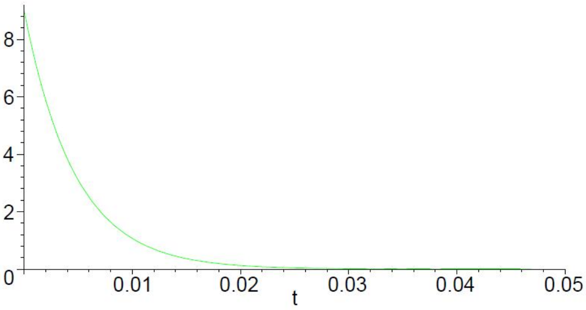
$$I(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}$$

Mit der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ erhält man

$$I(t) = \frac{U}{R} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



b) Strom:



Spannung

c) Der Strom ereicht 90% seines Maximalwertes zur Zeit t mit

$$\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = 0,1$$

also

$$T_{90} = \frac{L}{R}\ln 10$$

Die bis dahin umgesetzte Energie ist:

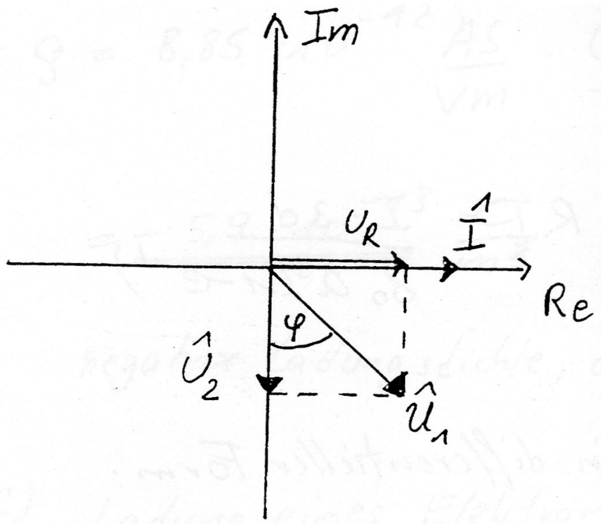
$$W = R\int_0^{T_{90}} I^2(t) = 0,042J$$

1.12 Aufgabe 12

a)

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}}$$

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_R + \hat{U}_C = \hat{I}\left(R - \frac{\imath}{\omega C}\right) = \hat{I}\hat{Z}$$



b)Berechne $\hat{U}_2$:

$$\hat{U}_2 = -\frac{\imath}{\omega C}\cdot\hat{I} = -\frac{\imath}{\omega C}\cdot\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}}$$

Damit ist das komplexe Verhältnis:

$$\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = -\frac{\imath}{\omega C}\cdot\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1 - \imath R\omega C}{(R\omega C)^2 + 1}$$

Bei der Rechnung wurde der komplexe Nenner mit seinem komplex konjugierten erweitert.

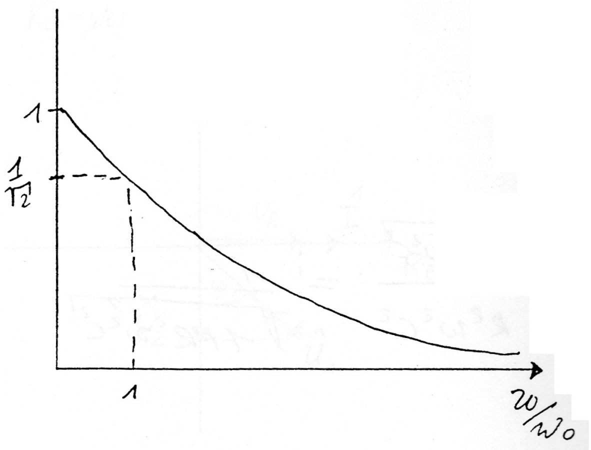
c) Berechne Amplitudenverhältnis:

$$\frac{U_{20}}{U_{10}} = \frac{U_{C0}}{\sqrt{U_{R0}^2 + U_{C0}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

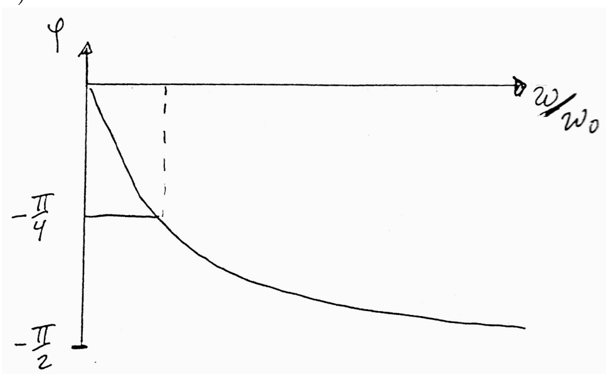
Berechnung der Phase: Achtung, es ist hier nicht nach der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung, sondern nach der Phase zwischen U_1 und U_2 gefragt!

$$\tan\varphi = \frac{U_{R0}}{-U_{C0}} = -\omega RC$$

$$\varphi = -\arctan(\omega RC)$$



d)



1.13 Aufgabe 13

a) Das vränderliche E-Feld bewirkt Magnetfeld um E-Feldlinien:

$$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \frac{d}{dt}\int \vec{D}\, d\vec{A}$$

Beide Seiten ausrechnen:

$$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = H \cdot 2\pi R$$

homogenes Feld im Kondensator:

$$\frac{d}{dt}\int \vec{D}\, d\vec{A} = \frac{d}{dt}\vec{D}\int d\vec{A} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \cdot R^2\pi$$

Gleichsetzten, sinusförmige Wechselspannung einsetzen und $E = \frac{U}{d}$ anwenden:

$$H = \epsilon_0 \frac{RU_0\omega}{2d}\cos\omega t = 1,11 \cdot 10^{-3}\cos\omega t \frac{A}{m}$$

b)

$$U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -n\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t}$$

Mit dem Ergebnis aus a) folgt:

$$U_{ind} = 0,172\mu V \sin\omega t$$

1.14 Aufgabe 14

a)

$$\hat{Z}_E = \frac{\hat{U}_E}{\hat{I}_E} = \imath\omega L + \left(\imath\omega C + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{R}{1+(\omega RC)^2} + \imath\left(\omega L - \frac{\omega R^2 C}{1+(\omega RC)^2}\right)$$

b) $P_B = 0$, d.h. $\hat{Z}_E$ muss reell sein:

$$\omega L = \omega L - \frac{\omega R^2 C}{1+(\omega RC)^2}$$

Beim Auflösen dieser Gleichung erhält man eine quadratische Gleichung für C mit denLösungen:

$$C_1 = 0,5nF$$

$$C_2 = 4,5nF$$

c) Berechnung der gesamten Leistug:

$$\hat{P} = \hat{U}_E \cdot \hat{I}_E^* = \frac{\hat{U}_E \hat{U}_E^*}{\hat{Z}_E}$$

Die Wirkleistug ist der Realteil von $\hat{P}$. Einsetzten ergibt:

$$P_{W1} = 0,375W$$

$$P_{W2} = 3,375W$$

d)Knotenregel: $\hat{I}_E = \hat{I}_C + \hat{I}_R$ Maschenregel: $\hat{U}_R = \hat{U}_C$ und $\hat{U}_L + \hat{U}_R = \hat{U}_E$ damit:

$$\frac{\hat{U}_E}{\hat{U}_E} = \imath\omega C\hat{U}_R + \frac{\hat{U}_R}{R} = \hat{U}_R\left(\frac{1+\imath\omega RC}{R}\right)$$

Weiter einsetzen:

$$\frac{\hat{U}_R}{\hat{U}_E} = \frac{R}{(R-\omega^2 RLC)+\imath\omega L}$$

Omsches Gesetz anwenden:

$$\hat{I}_R = \frac{\hat{U}_E}{(R-\omega^2 RLC)+\imath\omega L}$$

e) Wirkleistung wird maximal, wenn $\left|\hat{I}_R\right|$ maximal:

$$R - \omega^2 RLC = 0$$

und damit $C = \frac{1}{\omega^2 L} = 5nF$

f) $P_{Wmax} = \left|\hat{I}_R\right|^2 R = 3,75W$

2 Übungen zum Stoff der Feitagsvorlesung

2.1 Aufgabe 15

Leite Maxwellgleichung nach der Zeit ab:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Einsetzen der Maxwellgelichung $\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ und Anwendung von rot rot = grad div - Δ ergibt die gesuchte Wellengleichung:

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

2.2 Aufgabe 16

Der Betrag des komplexen Widerstandes lautet:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Für den Bruchteil des Widerstandes ergibt sich damit:

$$\frac{\left|Z\left(\omega_0 + \frac{R}{L}\right)\right|}{\left|Z\left(\omega_0\right)\right|} = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{1 + RC\omega_0}\right)^2}$$

bzw.

$$\frac{\left|Z\left(\omega_0 - \frac{R}{L}\right)\right|}{\left|Z\left(\omega_0\right)\right|} = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{1 - RC\omega_0}\right)^2}$$

Die Wirkleistung ergibt sich dann über:

$$P_W = I^2 R = \frac{U^2 R}{Z^2} = \frac{U_0^2 R}{2\left|Z\right|^2}$$

Die Ergebnisse für $\omega = \omega_0 \pm \frac{R}{L}$ sind nicht symmetrisch bzgl. ω_0.

2.3 Aufgabe 17

a) Die Sonne strahlt ihre Leistung gleichmäßig in den vollen Raumwinkel 4π ab. Damit gilt:

$$S = \frac{P}{4\pi a^2} = 1414,7\frac{W}{m^2}$$

wobei a der Abstand zwischen Sonne und Erde ist.
Die Fläche der der Sonne zugewandten Erdhalbkugel ist doppelt so groß wie eine Querschnittsscheibe. Damit ist die mittlere Bestrahlungsstärke:

$$S_{Erde} = 707,35\frac{W}{m^2}$$

b) Bei vollständiger Absorption gilt:

$$P_S = \frac{S}{c} = 2,358 \cdot 10^{-6}\frac{N}{m^2}$$

c)

$$P_S = \frac{F}{A} \Rightarrow F = P_S \cdot A = 578,7 \cdot 10^6 N$$