Strom und Magnetismus

Musterlösungen

Andreas Waeber

25. 02. 2009

1 Elektrischer Strom

1. Strahlungsheizer: U=115V, P=1250W
a) $P = U \cdot I \Rightarrow I = \frac{P}{U} = 10,9A$
b) $R = \frac{U}{I} = 10,6\Omega$
c) Mit t=3600s: $E = P \cdot t = 4,5MJ$

2. Ohmsche Widerstände I: Der Widerstand von Draht A beträgt mit $r_A = 0,5mm$

$$R_A = \frac{L}{\sigma_{el}\pi r_A^2}$$

Der Widerstand von Draht B errechnet sich analog mit $r_{B,i} = 0,5mm$ und $r_{B,a} = 1,0mm$

$$R_B = \frac{L}{\sigma_{el}\pi(r_{B,a}^2 - r_{B,i}^2)}$$

Damit beträgt der Quotient

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{r_{B,a}^2 - r_{B,i}^2}{r_A^2} = 3$$

3. Ohmsche Widerstände II: $d_1 = 1mm$, $d_2 = 0,25mm$, $\varrho_{Eisen} = 8,71 \cdot 10^{-8}\Omega m$
a) Wir betrachten den Draht als eine Reihenschaltung infinitesimaler Widerstände $dR = \varrho_{Eisen}\frac{dx}{A(x)}$. Der Querschnitt bei der Länge x ist $A(x) = \frac{\pi}{4}(d(x))^2 = \frac{\pi}{4}(d_1 + \frac{d_2-d_1}{L}x)^2$. Um den Gesamtwiderstand zu bestimmen, summieren wir nun über die gesamte Drahtlänge L:

$$R = \frac{4\varrho_{Eisen}}{\pi}\int_0^L (d_1 + \frac{d_2-d_1}{L}x)^{-2}dx =$$
$$= -\frac{4\varrho_{Eisen}}{\pi}\frac{L}{d_2-d_1}(d_1 + \frac{d_2-d_1}{L}x)^{-1}|_0^L = \frac{4\varrho_{Eisen}}{\pi} \cdot \frac{L}{d_1 \cdot d_2}$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert $R = 0,44\Omega$.
b)Bei einer Spannung U=1V fließt ein Strom $I = \frac{U}{R} = 2,25A$. Die Gesamtleistung $P = U \cdot I = 2,25W$ verteilt sich dabei allerdings nicht gleichmäßig auf die Leiterlänge. Mit $dP = I^2 \cdot dR$ ergibt sich für die Leistung pro infinitesimalem Längenstück

$$\frac{dP(x)}{dx} = I^2 \cdot \varrho_{Eisen} \frac{1}{A(x)}$$

4. Entladung eines Kondensators: Bei der Entladung eines Kondensators gilt für die Spannung

$$U_1 = U_0 e^{-\frac{t_1}{RC}}$$

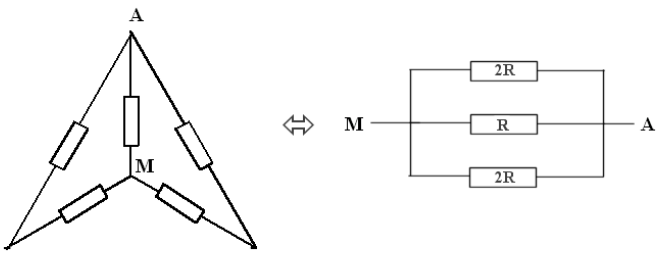
Umstellen der Formel liefert die Kapazität:

$$C = \frac{t_1}{R \cdot \ln \frac{U_0}{U_1}} = 1,9mF$$

Die Zeitkonstante ist ganz einfach $\tau = RC = 95s$.
Die ursprüngliche Ladung auf der Kondensatorplatte berechnet sich aus

$$Q_0 = C \cdot U_0 = 0,38C$$

5. Widerstandsnetzwerk: Wenn wir zwischen M und A eine Spannung anlegen, sehen wir direkt, dass zwischen den unteren Ecken des Dreiecks keine Potentialdifferenz auftritt. Der untere Widerstand kann also weggelassen werden. Die anderen Widerstände lassen sich entsprechend dem Ersatzschaltbild rechts umstellen.
Damit beträgt der Gesamtwiderstand



$$\frac{1}{R_{Ges}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{2}{R} \Rightarrow R_{Ges} = \frac{R}{2}$$

Analog lässt sich auch der Gesamtwiderstand zwischen je zwei Ecken des Dreiecks zu $\frac{R}{2}$ bestimmen.

6. Widerstandsnetzwerk II: Wir legen in beiden Maschen die Stromrichtung so fest, dass der Strom im Gegenuhrzeigersinn fließen soll. Nach der Maschenregel gilt dann für die obere Masche

$$U_1 - U_2 - U_3 - I_2R_2 = 0$$

und für die untere Masche

$$U_2 - I_1R_1 = 0$$

Damit lässt sich der Strom durch die Widerstände einfach durch Umstellen der Gleichungen bestimmen. Es ergibt sich $I_1 = 0,05A$ und $I_2 = -0,06A$.
Wenn Φ_b das Potential am Punkt b ist, gilt für das Potential an Punkt a, dass $\Phi_a = \Phi_b + U_3 + U_2$ ist. Die Potentialdifferenz beträgt folglich $\Delta\Phi = \Phi_a - \Phi_b = 9V$.

7. Widerstandsnetzwerk III: Bei der Festlegung der Stromrichtung wählen wir für beide Maschen die technische Stromrichtung. In der linken Masche bewegt sich der Strom also im Urzeigersinn, in der rechten Masche im Gegenuhrzeigersinn.
a) Nach der Knotenregel gilt somit für die Ströme, die sich im oberen Knoten treffen

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Nach der Maschenregel gilt zudem

$$-U_1 + R_3I_3 + R_1I_1 = 0$$

$$-U_2 + R_2I_2 + R_1I_1 = 0$$

Lösen des Gleichungssystems ergibt $I_1 = \frac{5}{19}A$ von oben nach unten, $I_2 = \frac{-3}{19}A$ von rechts nach links und $I_3 = \frac{8}{19}A$ von links nach rechts. Die Rate mit der Energie in Wärme umgewandelt wird ist die Leistung $P = I^2R$. Für die drei Widerstände ergibt sich $P_1 = 0,346W$, $P_2 = 0,050W$, $P_3 = 0,709W$.
b) Die Leistung der Batterien ist gleich ihrer jeweiligen Spannung mal der Stromstärke in der eigenen Masche, also $P_{B1} = U_1I_3 = 1,26W$ und $P_{B2} = U_2I_2 = -0,157W$. Batterie 2 wird also aufgeladen.

2 Statische Magnetfelder

8. Hohlzylinder: Nach Ampere gilt $\oint_{\partial A} \vec{B}d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$. Dabei entspricht I dem Strom, der durch die geschlossene Fläche fließt, über deren Rand integriert wird. Da der Zylinder symmetrisch zu seiner Mittelachse ist, integrieren wir über einen Kreisrand, so dass die linke Seite stets $\oint_{\partial A} \vec{B}d\vec{s} = 2\pi \cdot r \cdot B$ ist. Der eingeschlossene Strom ist im Hohlraum 0, außerhalb des Zylinders I und im Zwischenbereich $I(r) = \frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}I$. Damit ist die Feldstärke

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi(b^2-a^2)}(r - \frac{a^2}{r}) & a < r \leq b \\ I & b < r \end{cases}$$

9. Gebogener Leiter: Nach Biot-Savart gilt $\vec{B}(\vec{r_1}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \int_s \frac{\hat{e}_{12} \times d\vec{s}_2}{r_{12}^2}$. Da wir das Magnetfeld im Ursprung suchen, folgt direkt, dass die geraden Leiterstücke nichts zu diesem Feld beitragen können, da dort $\hat{e}_{12} \parallel d\vec{s}_2$ ist und das Kreuzprodukt folglich verschwindet. Die Berechnung der Feldstärke, die durch den Halbkreis vervorgerufen wird, ist aber analog zur kreisförmigen Schleife aus der Vorlesung; wir integrieren abschließend lediglich von o bis π statt von 0 bis 2π. Das Feld im Ursprung beträgt also

$$\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0 I}{4R} \hat{e}_z$$

10. Kraft auf Li-Ionen: Für die durch das elektrischen Feld verursachte Kraft gilt: $F_C = Eq$ Für die vom Magnetfeld verursachte Kraft gilt: $F_L = qvB \sin\alpha$, wobei $\sin\alpha = 1$, da $\alpha = 90°$ Das Gleichsetzen beider Kräfte liefert $E = \frac{qvB}{q} = vB$.Die Geschwindigkeit v lässt sich aus der kinetischen Energie E_{kin} der Ionen berechnen: $v = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}}$. E_{kin} ergibt sich aus der durchlaufenen Potentialdifferenz zu $E_{kin} = Uq = 10keV$. Die Feldstärke ergibt sich letztlich zu $E = 6,8 \cdot 10^5 \frac{V}{m}$.

11. Kraft auf Leiter: Gemäß der Vorlesung ist $\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B})$. Damit gilt für die Beträge $F = I \cdot L \cdot B \cdot \sin\alpha$. Der gesuchte Winkel beträgt also

$$\alpha = \arcsin(\frac{F}{BIL}) = 41,8°$$

12. Parallele Drähte: Die Kraft auf einen Leiter ist $\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B})$. Das Magnetfeld, das auf den einen Leiter wirkt, ist gerade jenes, welches der andere Leiter im Abstand 2a hervorruft. Das Magnetfeld eines Leiters ist aber $B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r}$. Folglich ergibt sich für die Kraft von Draht 1 auf Draht 2

$$\vec{F} = I_2 \cdot (\vec{L} \times \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi r} \hat{e}_\phi) = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot L}{2\pi r} (\hat{e}_\phi \times \hat{e}_z)$$

Die Kraft pro Längeneinheit ist folglich

$$\frac{\vec{F}}{L} = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi r} \hat{e}_r)$$

Da actio gleich reactio ist die Kraft von Draht 2 auf Draht 1 betragsmäßig gleich. Für unseren Fall, dass die Ströme parallel fließen, ist dies eine anziehende Kraft, für antiparallele Ströme wirkt die Kraft abstoßend.

13. Dipolmoment: Das magnetische Dipolmoment ist$\vec{p}_m = p_m(0,6\hat{e}_x - 0,8\hat{e}_y)$ mit $p = I \cdot A = 4,02mA$.
a) Damit ist das Drehmoment $\vec{D} = \vec{p}_m \times \vec{B} = p_m(0,6\hat{e}_x - 0,8\hat{e}_y) \times (0,25\hat{e}_x + 0,3\hat{e}_z) = p_m[-0,24\hat{e}_x - 0,18\hat{e}_y + 0,2\hat{e}_z]$.
b) Die potentielle Energie beträgt $E_pot = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} = -p_m(0,6\hat{e}_x - 0,8\hat{e}_y) \cdot (0,25\hat{e}_x + 0,3\hat{e}_z) = -0,15p_m = -6,0 \cdot 10^{-4}J$

14. Hall-Effekt: Es gilt im Gleichgewicht $F_L = F_C$:

$$qv_D B = qE = q\frac{U_H}{b} \Rightarrow bv_D B = U_H$$

$$\Rightarrow v_D = \frac{U_H}{bB} = 1,1 \cdot 10^{-4}\frac{m}{s}$$

Die Ladungsträgerdichte berechnen wir über die Stromstärke. x sei die Länge des Metallstreifens:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{n \cdot q \cdot A\,dx}{dt} = n \cdot q \cdot b \cdot d \cdot v_D$$

$$n = \frac{I}{q \cdot b \cdot d \cdot v_D} = 5,85 \cdot 10^{28} m^{-3}$$