

Ferienkurs WS 2008/09

Strom und Magnetismus

Andreas Waeber

25.02.2009

Inhaltsverzeichnis

1	Elektrischer Strom	2
1.1	Allgemeines	2
1.2	Kontinuitätsgleichung	2
1.3	Ohmsches Gesetz	3
1.4	Arbeit und Leistung	3
1.5	RC-Schaltkreise	4
1.6	Widerstandsnetzwerke	5
1.7	Stromquellen	6
2	Statische Magnetfelder	7
2.1	Allgemeines	7
2.2	Magnetischer Fluss	7
2.3	Amperesches Gesetz	8
2.4	Vektorpotential	9
2.5	Biot-Savart-Gesetz	9
2.6	Kraft auf bewegte Ladungen	12
2.7	Hall-Effekt	13
2.8	Materie im Magnetfeld	14

1 Elektrischer Strom

1.1 Allgemeines

Elektrischer Strom bedeutet bewegte Ladungen. Als **Stromstärke I** ist die Ladungsänderung pro Zeit definiert. Ihre Einheit ist das Ampere.

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

Gemäß der technischen Stromrichtung wird der Stromfluss *positiver* Ladungsträger mit positivem Vorzeichen versehen. Außerhalb einer Spannungsquelle fließt der Strom also immer von Plus nach Minus.

Neben der Stromstärke ist auch die **Stromdichte \vec{j}** von Bedeutung. Sie gibt den Strom pro Fläche an und ist wie folgt definiert:

$$I = \int_A \vec{j} d\vec{A} \quad (2)$$

Befinden sich in einem Leiter (Querschnittsfläche A) N Ladungen q pro Volumenelement, die sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegen, dann gilt:

$$I = Nq\vec{A}\vec{v} \quad (3)$$

$$\vec{j} = Nq\vec{v} = \rho_{el}\vec{v} \quad (4)$$

1.2 Kontinuitätsgleichung

Der Gesamtstrom, der durch eine geschlossene Hüllfläche fließt, entspricht der Änderung der von der Fläche eingeschlossenen Ladung. Dies ist anschaulich durch Vergleich von Gleichung (1) und (2) nachvollziehbar.

$$I = \oint \vec{j} d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_{el} dV \quad (5)$$

Nach dem Satz von Gauß ist

$$\oint \vec{j} d\vec{A} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV$$

Differentiell geschrieben ergibt sich damit die **Kontinuitätsgleichung**:

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_{el}(\vec{r}, t) \quad (6)$$

1.3 Ohmsches Gesetz

Ladungsbewegung wird grundsätzlich durch zwei Faktoren verursacht, thermische Energie und das Einwirken elektrischer Felder. Die mittlere thermische Geschwindigkeit ist Null da die thermische Bewegung isotrop ist. Ein elektrisches Feld ruft dagegen eine gerichtete Driftgeschwindigkeit \vec{v}_D hervor. Diese hängt neben der Feldstärke noch von der Stoßzeit τ_s ab, welche die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen mit anderen Teilchen angibt.

$$\langle \vec{v}_D \rangle = \frac{q\vec{E}}{m}\tau_s \quad (7)$$

Setzen wir die Driftgeschwindigkeit in Gleichung (4) ein, so erhalten wir

$$\vec{j} = Nq\vec{v}_D = \frac{Nq^2\tau_s}{m}\vec{E}$$

Fassen wir den Vorfaktor als elektrische Leitfähigkeit σ_{el} zusammen, ergibt sich das **Ohmsche Gesetz**

$$\vec{j} = \sigma_{el}\vec{E} \quad (8)$$

Etwas vertrauter ist die integrale Form des Ohmschen Gesetzes. Da für einen homogenen Leiter der Länge L mit Querschnitt A gilt, dass

$$U = \int_L EdL = E \cdot L$$
$$I = \int_A \vec{j}d\vec{A} = j \cdot A$$

lässt sich (8) überführen in

$$U = \frac{L}{\sigma_{el}A}I = \varrho_s \frac{L}{A}I = R \cdot I \quad (9)$$

Die materialspezifische Größe ϱ_s heißt spezifischer Widerstand und ist gleich dem Kehrwert der elektrischen Leitfähigkeit σ_{el} . Geläufiger ist der **Widerstand R** , der in der Einheit *Ohm* angegeben wird. Widerstand und Leitfähigkeit sind temperaturabhängige Größen. Bei Metallen wächst der Widerstand und die Leitfähigkeit sinkt mit zunehmender Temperatur.

Anmerkung: Auch wenn die Verwendung der Buchstaben etwas irreführend ist, hat der spezifische Widerstand ϱ_s ebensowenig mit der Ladungsdichte ϱ_{el} zu tun, wie die elektrische Leitfähigkeit σ_{el} mit der Flächenladungsdichte σ !

1.4 Arbeit und Leistung

Im elektrischen Widerstand liegt eine Potentialdifferenz vor. Daher ist ein Ladungstransport stets mit einer zu verrichtenden Arbeit verbunden.

$$W = Q \cdot U \quad (10)$$

Bei einem Stromfluss I wird dabei Leistung abgegeben

$$P = \frac{dW}{dt} = U \frac{dQ}{dt} = U \cdot I \quad (11)$$

Bei konstanter Spannung und Stromstärke wird durch den Stromfluss in einem Zeitintervall Δt die entsprechende Arbeit verrichtet:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} UI dt = UI \Delta t \quad (12)$$

Die abgegebene elektrische Energie geht als Wärmeenergie in den Leiter, der sich erhitzt. Die freigewordene Wärme bezeichnet man als *Joulesche Wärme*.

1.5 RC-Schaltkreise

Ein Beispiel für die Anwendung des Ohmschen Gesetzes findet sich bei der Auf- und Entladung eines Kondensators. Wir betrachten zunächst den Ladevorgang nach Abbildung 1. Wenn der Schalter geschlossen wird, liegt die Spannung U_0 über R und C an.

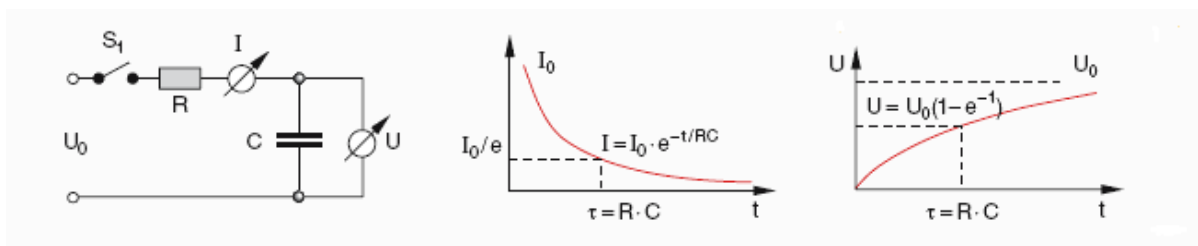


Abbildung 1: Aufladung eines Kondensators

Während des Ladevorgangs baut sich am Kondensator eine Gegenspannung $U(t)$ auf. Mit $Q(t) = C \cdot U(t)$ ist dann

$$I(t) = \frac{U_0 - U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} - \frac{Q(t)}{RC}$$

Leitet man die Gleichung nach der Zeit ab, so erhält man

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} I(t)$$

Die Differentialgleichung lässt sich leicht lösen und wir erhalten

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (13)$$

$$U(t) = U_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (14)$$

Man bezeichnet das Produkt RC als charakteristische Zeitkonstante.

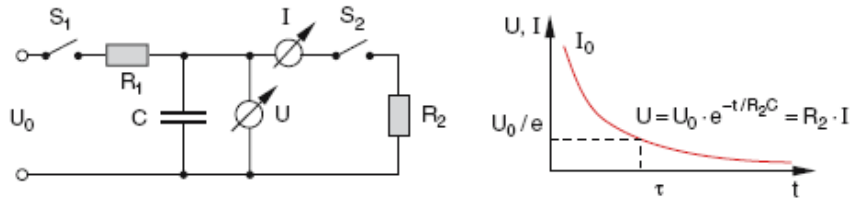


Abbildung 2: Entladung eines Kondensators

Analog verfahren wir mit dem Entladevorgang (Abbildung 2). Nun ist Schalter S_1 offen und C geladen. Wenn wir jetzt Schalter S_2 schließen, fließt durch R_2 der Strom

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = -C \frac{dU(t)}{dt} = \frac{U(t)}{R_2}$$

Damit haben wir aber eine einfache Differentialgleichung in U , so dass sich als Lösung ergibt

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{R_2 C}} \quad (15)$$

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{R_2 C}} \quad (16)$$

1.6 Widerstandsnetzwerke

Bei komplexen elektrischen Schaltungen mit Kombinationen aus Parallel- und Reihenschaltungen sind die **Kirchhoffschen Regeln** sehr nützlich zur Berechnung von Strömen, Spannungen und Gesamtwiderständen.

- i) Knotenregel: Die Summe der einlaufenden und auslaufenden Ströme an einem Knotenpunkt ist Null. Ströme, die in den Knoten hineinfließen, werden positiv gezählt, hinausfließende Ströme negativ.

$$\sum_k I_k = 0 \quad (17)$$

- ii) Maschenregel: Die Summe der Spannungen entlang einer geschlossenen Leiter Schleife (Masche) ist Null. Die Spannung, die über einem Widerstand abfällt ($I \cdot R$) wird dabei negativ gerechnet, wenn der Widerstand in Stromrichtung durchlaufen wird, andernfalls positiv. Durchläuft man eine Spannungsquelle vom Minus- zum Pluspol, so wird sie positiv gezählt, andernfalls negativ.

$$\sum_k U_k = 0 \quad (18)$$

Mit diesen beiden Regeln können wir nun sehr einfach die Regeln für Reihen- und Parallelschaltung herleiten.

- i) Reihenschaltung: Bei einer Reihenschaltung von k Widerständen R_k haben wir eine einzige große Masche, so dass für die Spannungen gilt

$$U_0 = \sum_k U_k$$

Gemäß der Knotenregel (wir denken uns Knoten mit einem einlaufenden und einem auslaufenden Knoten zwischen den Widerständen) ist

$$U_0 = IR_{Ges} = \sum_k U_k = \sum_k IR_k$$

Damit folgt, dass der Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung gleich der Summe aller Einzelwiderstände ist:

$$R_{Ges} = \sum_k R_k \quad (19)$$

- ii) Parallelschaltung: Bei der Parallelschaltung gehen alle Teilzweige in einem Knotenpunkt aus dem Hauptzweig hervor, weshalb mit der Knotenregel für k Widerstände in k Teilzweigen gilt

$$I = \sum_k I_k$$

Mit der Maschenregel sehen wir, dass sich für jeden Widerstand R_k eine geschlossene Masche finden lässt, die nur noch die Stromquelle mit einschließt. Folglich ist die Spannung in jedem Teilzweig gleich der Ausgangsspannung und wir erhalten

$$I = \frac{U}{R_{Ges}} = \sum_k \frac{U}{R_k}$$

Bei einer Parallelschaltung ist also der Kehrwert des Gesamtwiderstands gleich der Summe der reziproken Einzelwiderstände:

$$\frac{1}{R_{Ges}} = \sum_k \frac{1}{R_k} \quad (20)$$

1.7 Stromquellen

Reale Stromquellen sind sowohl durch die *Klemmenspannung* U als auch durch den *Innenwiderstand* R_i charakterisiert. Zur Berechnung der Klemmspannung kann R_i als ein in Reihe zur idealen Spannungsquelle U_0 geschalteter Widerstand betrachtet werden. Die Klemmspannung ist dann gleich der idealen Spannung minus jener Spannung, die am Innenwiderstand abfällt.

$$U = U_0 - IR_i = U_0 \left(1 - \frac{R_i}{R_i + R_a}\right)$$

$$U = U_0 \cdot \frac{R_a}{R_i + R_a} \quad (21)$$

2 Statische Magnetfelder

2.1 Allgemeines

Experimentell zeigt sich, dass sich die Kraft zwischen zwei magnetischen Monopolen analog zur Coulomb-Kraft in der Elektrostatik verhält. Streng genommen gibt es solche magnetischen Monopole in der Realität nicht, sie lassen sich aber beispielsweise durch einen langen Stabmagnet simulieren, in dem die Pole weit voneinander entfernt sind. Wenn der einzelne Pol sich durch seine Polstärke p auszeichnet, gilt

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{p_1 p_2}{r^2} \hat{e}_r \quad (22)$$

Entsprechend der elektrischen Feldstärke \vec{E} ist die **magnetische Erregung \mathbf{H}** ($[\mathbf{H}] = 1 \frac{\text{A}}{\text{m}}$) definiert:

$$\vec{H} = \lim_{p_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{p_2} \quad (23)$$

In der Praxis etwas gebräuchlicher ist die **magnetische Feldstärke \mathbf{B}** , die mit dem Tesla auch eine eigene Einheit besitzt ($[\mathbf{B}] = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1\text{T}$).

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad (24)$$

Die magnetische Feldstärke ist der elektrischen in vielerlei Hinsicht ähnlich. Sie unterscheidet sich jedoch in dem wesentlichen Punkt, dass ihre Feldlinien immer in sich geschlossen sind. Es gibt im Magnetfeld also keine Quellen und Senken.

Die Magnetfeldlinien laufen außerhalb des Magneten stets vom Nord- zum Südpol, innerhalb des Magneten von Süd- zum Nordpol.

Anmerkung: Häufig wird auch \mathbf{H} als magnetische Feldstärke bezeichnet und \mathbf{B} als magnetische Flussdichte oder Induktion. In diesem Skript ist die oben getroffene Definition beibehalten.

2.2 Magnetischer Fluss

Der magnetische Fluss ist ein Maß für die Feldlinienzahl durch die Fläche A . Er ist definiert als

$$\Phi_{mag} = \int_A \vec{B} d\vec{A} \quad (25)$$

Da die magnetischen Feldlinien geschlossen sind, muss für eine geschlossene Fläche (z.B. Kugeloberfläche) gelten, dass ebensoviele Linien in die Fläche hineingehen wie herauskommen. Mit dem Satz von Gauß gilt

$$\oint \vec{B} d\vec{A} = \int_V \text{div} \vec{B} dV = 0$$

Damit erhalten wir die mathematische Formulierung dafür, dass Magnetfelder quellen- und senkenfrei sind:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (26)$$

Zur Erinnerung: im E-Feld war $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0} \neq 0$.

2.3 Amperesches Gesetz

Im elektrostatischen Feld galt außerdem, dass $\oint \vec{E} d\vec{s} = 0$ ist. Für Magnetfelder zeigt sich dagegen ein Zusammenhang, der als Amperesches Durchflutungsgesetz bezeichnet wird:

$$\oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \cdot I \quad (27)$$

Es wird über den Rand der Fläche integriert, durch die der Strom fließt.

Ein verbreitetes Beispiel ist das Magnetfeld eines langen stromdurchflossenen Leiters im Abstand r . Wir integrieren über den Rand einer Kreisfläche, sodass gilt

$$\oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{s} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I$$

Umstellen liefert die Feldstärke, die indirekt proportional zum Abstand r ist.

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \quad (28)$$

Auch das Magnetfeld einer langgestreckten Spule mit N Windungen lässt sich mit dem Ampereschen Gesetz sehr leicht berechnen. Dafür wählen wir als Integrationspfad ein Rechteck, das mit einer Seite durch die Spulenachse führt (Abbildung 3).

Da die Strecken AC und BD senkrecht auf das Magnetfeld stehen, wird das Skalar-

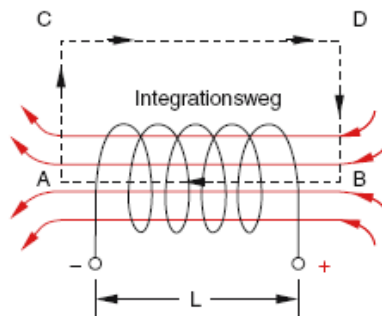


Abbildung 3: Integrationspfad für das Magnetfeld einer langgestreckten Spule

produkt 0. Die Strecke CD lässt sich beliebig weit von der Spule entfernen, bis das

Magnetfeld fast völlig verschwindet. Für die Integration bleibt übrig:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{s} &= \int_B^A \vec{B} d\vec{s} = B \cdot L = \mu_0 \cdot N \cdot I \\ \Rightarrow B &= \mu_0 \cdot \frac{NI}{L} \end{aligned} \quad (29)$$

Anmerkung: Unter Berücksichtigung von Gleichung (2) lässt sich das Amperesche Gesetz mit dem Satz von Stokes in eine differentielle Form umformen:

$$\begin{aligned} I \cdot \mu_0 &= \mu_0 \int_A \vec{j} d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{s} = \int_A \text{rot} \vec{B} d\vec{A} \\ \Rightarrow \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (30)$$

2.4 Vektorpotential

Bislang traten viele Analogien zwischen den elektrischen und den magnetischen Feldern auf. Bei der Suche nach einem magnetischen Potential zeigt sich allerdings, dass es keinen skalaren Ausdruck gibt, der die nötigen Bedingungen erfüllt. Stattdessen wird ein **Vektorpotential** \vec{A} definiert:

$$B = \text{rot} \vec{A} \quad (31)$$

Diese Definition allein reicht aber noch nicht aus, um das Vektorpotential eindeutig festzulegen. Da die Rotation eines Gradientenfelds stets 0 ist, ergäbe sich dasselbe Magnetfeld, wenn man ein beliebiges Gradientenfeld ∇f zum Vektorpotential hinzuaddieren würde. Um das auszuschließen wird als zweite Bedingung an das Vektorpotential eine sogenannte Eichbedingung eingeführt.

Für stationäre, d.h. zeitunabhängige Felder ist dies die Coulomb-Eichung. Neben (31) muss für das Vektorpotential gelten

$$\text{div} \vec{A} = 0 \quad (32)$$

2.5 Biot-Savart-Gesetz

Das Vektorpotential lässt sich aus einer gegebenen Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ ganz ähnlich bestimmen wie das elektrische Potential aus der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$. Einsetzen von (31) in (30) ergibt

$$\mu_0 \vec{j} = \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \text{div}(\text{grad} \vec{A})$$

Gemäß der Coulomb-Eichung ist der erste Summand Null und es gilt

$$\text{div}(\text{grad} \vec{A}) = \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (33)$$

Komponentenweise entspricht die Gleichung der Poisson-Gleichung $\Delta\Phi_{el} = -\frac{\rho_{el}}{\epsilon_0}$. Daher sind auch die Lösungen der beiden Gleichungen sehr ähnlich:

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_2) dV_2}{r_{12}} \quad (34)$$

Differentiation nach \vec{r}_1 gemäß Gleichung 31 liefert die magnetische Feldstärke:

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{rot}\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}_2) dV_2}{r_{12}}\right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\hat{e}_{12} \times \vec{j}(\vec{r}_2)}{r_{12}^2} dV_2 \quad (35)$$

Bei einem Strom durch einen dünnen Draht ist die Stromdichte über der Querschnittsfläche nahezu konstant und es gilt

$$\vec{j} dV = \vec{j} \cdot d\vec{A} \cdot d\vec{s} = I \cdot d\vec{s}$$

Das Volumenintegral reduziert sich dann zu einem Linienintegral, das als **Biot-Savart-Gesetz** bezeichnet wird:

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \int_s \frac{\hat{e}_{12} \times d\vec{s}_2}{r_{12}^2} \quad (36)$$

Wie diese Formel angewendet wird, wollen wir uns anhand von zwei Beispielen verdeutlichen:

i) Gerader Leiter:

Der Punkt P, an dem wir das Magnetfeld suchen, befindet sich bei \vec{r}_1 , der Ort

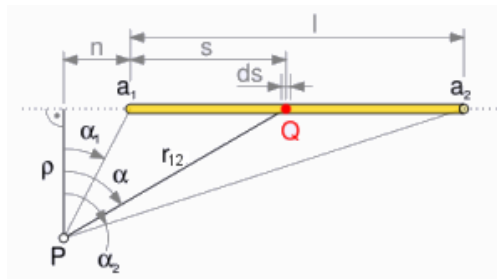


Abbildung 4: Zur Berechnung des Magnetfelds eines langen geraden Leiters

von Q liegt bei \vec{r}_2 . Es gilt wie oben hergeleitet

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \int_s \frac{\hat{e}_{12} \times d\vec{s}_2}{r_{12}^2} \quad (i)$$

Rein geometrisch betrachtet gilt nach Abbildung 4

$$r_{12} = \frac{\rho}{\cos\alpha} \quad (ii)$$

$$n + s = \rho \cdot \tan\alpha \quad (\text{iii})$$

Aus der Ableitung von (iii) folgt weiter, dass

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{\rho}{\cos^2\alpha} \Rightarrow ds = \frac{\rho}{\cos^2\alpha} d\alpha \quad (\text{iv})$$

Setzen wir diese Beziehungen in (i) ein, dann erhalten wir

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho d\alpha}{\cos^2\alpha} \frac{\cos^2\alpha}{\rho^2} \cos\alpha \hat{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) \hat{e}_\varphi \quad (\text{v})$$

Dabei ist \hat{e}_φ der Einheitsvektor an der Stelle P senkrecht zur Ebene, in der sich P und der Draht befinden. Wenn die Länge des Drahts gegen unendlich geht, ist $\alpha_1 = -90^\circ$ und $\alpha_2 = +90^\circ$ und wir erhalten wie erwartet Gleichung 28:

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{e}_\varphi \quad (\text{vi})$$

ii) Kreisförmige Schleife:

Zunächst wollen wir nur das Magnetfeld im Mittelpunkt der Leiterschleife bestimmen. Dazu parametrisieren wir den Weg \vec{s}_2 , über den wir integrieren wollen, durch einen Kreis um den Mittelpunkt M

$$\vec{s}_2(\phi) = \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{i})$$

Da wir für unsere Formel nur eine infinitesimale Wegstrecke brauchen, differenzieren wir den obigen Ausdruck nach ϕ und erhalten

$$d\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -R\sin\phi \\ R\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi \quad (\text{ii})$$

Nach unserer Parametrisierung ist der Einheitsvektor \hat{e}_{12} genau gleich $\frac{\vec{s}_2}{|\vec{s}_2|}$ und somit senkrecht auf dem infinitesimalen Stück $d\vec{s}$. Damit ist das Kreuzprodukt

$$\hat{e}_{12} \times d\vec{s}_2 = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin\phi \\ R\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} d\phi \quad (\text{iii})$$

Eingesetzt in Gleichung 36 ergibt sich also

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \int_0^{2\pi} \frac{R\hat{e}_z d\phi}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \frac{2\pi}{R} \hat{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{e}_z \quad (\text{iv})$$

Mit unserer Parametrisierung (i) können wir des Weiteren das Magnetfeld entlang der z -Achse berechnen. Der Verbindungsvektor \vec{r}_{12} ist dann

$$\vec{r}_{12} = \begin{pmatrix} -R\cos\phi \\ -R\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{v})$$

Geteilt durch den Betrag $r_{12} = \sqrt{R^2 + z^2}$ ergibt sich der Einheitsvektor, sodass sich mit (ii) das Kreuzprodukt berechnen lässt:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{12} \times d\vec{s}_2 &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \begin{pmatrix} -R\cos\phi \\ -R\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin\phi \\ R\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \begin{pmatrix} zR\cos\phi \\ zR\sin\phi \\ R^2 \end{pmatrix} d\phi \end{aligned} \quad (\text{vi})$$

Eingesetzt in die Biot-Savart-Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi\sqrt{R^2 + z^2}^3} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} zR\cos\phi \\ zR\sin\phi \\ R^2 \end{pmatrix} d\phi = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi\sqrt{R^2 + z^2}^3} 2\pi R^2 \hat{e}_z = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \vec{A}}{2\pi\sqrt{R^2 + z^2}^3} \end{aligned} \quad (\text{vii})$$

Das Produkt aus der Fläche, die die Leiterschleife umschließt, und dem Strom durch die Leiterschleife bezeichnet man als magnetisches Dipolmoment der Stromschleife.

$$\vec{p} = I \cdot \vec{A} \quad (37)$$

2.6 Kraft auf bewegte Ladungen

Auf Ladungsträger q , die sich im Magnetfeld \vec{B} bewegen, wirkt die sogenannte **Lorentzkraft**

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (38)$$

Wenn das Magnetfeld zusätzlich von einem elektrischen Feld überlagert ist, so wirkt auf die Ladung die Summe der beiden Kräfte, die allgemeine Lorentzkraft

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (39)$$

Diese Kraft wirkt natürlich nicht nur auf Ladungen im freien Raum, sondern beispielsweise auch auf bewegte Ladungen in Leitern.

Ein Leiter der Länge L und des Querschnitts A wird von einem Strom der Stärke

$$I = n \cdot q \cdot v_D \cdot A$$

durchflossen. Dann ist die Kraft auf den stromdurchflossenen Leiter proportional zu dessen Länge und Stromstärke. Auf ein Leiterstück dL mit $n \cdot A \cdot dL$ Ladungen q wirkt die Lorentzkraft

$$d\vec{F} = n \cdot q \cdot A \cdot dL \cdot (\vec{v}_D \times \vec{B}) = (\vec{j} \times \vec{B})dV \quad (40)$$

Die Gesamtkraft auf den Leiter ist also allgemein

$$\vec{F} = \int_V (\vec{j} \times \vec{B})dV \quad (41)$$

Auf unseren Draht wirkt mit $I = \vec{j} \cdot \vec{A}$ die Lorentzkraft

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B}) \quad (42)$$

Wenn sich eine rechteckige Leiterschleife der Kantenlänge a (achsenparallel) und b (senkrecht zur Achse) im Magnetfeld befindet, kann durch einen Stromfluss auch ein Drehmoment hervorgerufen werden. Auf die beiden achsenparallelen Seiten wirkt dann die Kraft $\vec{F} = I \cdot (\vec{a} \times \vec{B})$, was zu einem Drehmoment von

$$\vec{D} = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot (\hat{e}_b \times \vec{F}) = I \cdot \vec{A} \times \vec{B}$$

führt. Das Produkt aus Strom und Fläche lässt sich zum magnetischen Dipolmoment zusammenfassen:

$$\vec{D} = \vec{p}_m \times \vec{B} \quad (43)$$

Damit haben wir einmal mehr eine völlige Analogie zur Elektrostatik. Wie dort beträgt die potentielle Energie im Magnetfeld

$$W_{pot} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} \quad (44)$$

2.7 Hall-Effekt

In einer Hall-Sonde wird die Lorentzkraft dazu verwendet, die Stärke eines Magnetfeldes zu messen.

Der Aufbau einer Hall-Sonde ist in Abbildung 5 dargestellt. Durch den Leiter fließt in horizontaler Richtung ein Strom. Wird er nun senkrecht in das zu messende (in die Bildebene gerichtete) Magnetfeld gehalten, so erfolgt aufgrund der Lorentzkraft eine vertikale Ablenkung der Ladungsträger im Metall. Dadurch entsteht im abgebildeten Fall ein Elektronenüberschuss an der Unterseite und ein Elektronenmangel an der Oberseite des Leiters, weshalb eine Querspannung, die sogenannte Hallspannung, zu messen ist. Da sich durch die Hallspannung ein elektrisches Feld zwischen Ober- und Unterseite des Leiters aufbaut, gilt im Gleichgewichtsfall

$$F_{el} = q \cdot E = q \cdot v_D \cdot B \Rightarrow E = v_D \cdot B \quad (45)$$

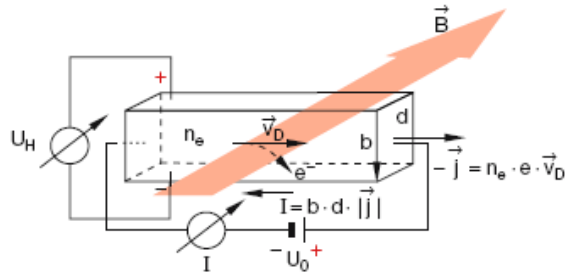


Abbildung 5: Aufbau einer Hall-Sonde

Wie im Kondensator ist die Hallspannung damit

$$U_H = E \cdot b = b \cdot v_D \cdot B \quad (46)$$

Mit der Ladungsträgerdichte n und der Driftgeschwindigkeit $v_D = -\frac{j}{qn} = -\frac{I}{qnbd}$ ergibt sich für die Hallspannung

$$U_H = -\frac{I \cdot B}{n \cdot q \cdot d} \quad (47)$$

2.8 Materie im Magnetfeld

Wir hatten in Kapitel 2.3 gesehen, dass im Vakuum das Magnetfeld einer langgestreckten Spule durch

$$B_{vak} = \mu_0 \cdot \frac{NI}{L} \quad (48)$$

beschrieben werden kann. Wenn der Innenraum der Spule mit Materie (z.B. Eisenkern) gefüllt wird, vergrößert sich die Feldstärke um eine materialspezifische Konstante μ . Man bezeichnet μ als *magnetische Permeabilität*.

$$\vec{B}_{mat} = \mu \vec{B}_{vak} = \mu \mu_0 \vec{H}_{vak} \quad (49)$$

Ähnlich dem elektrischen Feld ist die Veränderung der Feldstärke auf eine „induzierte“ Polarisierung in der Materie zurückzuführen, durch die vorhandene magnetische Dipole ausgerichtet werden. Entsprechend der Polarisierung P im E-Feld gibt die Magnetisierung M das magnetische Moment pro Volumen an. Ihre Maßeinheit entspricht der der magnetischen Erregung ($[M] = 1 \frac{A}{m}$).

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_V \vec{p}_m \quad (50)$$

Die magnetische Feldstärke ist

$$\vec{B}_{mat} = \mu_0 (\vec{H}_{vak} + \vec{M}) \quad (51)$$

Es zeigt sich experimentell, dass Magnetisierung und magnetische Erregung in linearer Näherung proportional zueinander sind. Die Proportionalitätskonstante χ wird als magnetische Suszeptibilität bezeichnet.

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}_{vak} \quad (52)$$

Eingesetzt in obige Gleichung ergibt sich also

$$\vec{B}_{mat} = \mu_0(\vec{H}_{vak} + \chi\vec{H}_{vak}) = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} \quad (53)$$

Damit ist $\mu = 1 + \chi$.

Verschiedenartige magnetische Stoffe werden nach ihrer magnetischen Suszeptibilität unterschieden:

- ohne magnetische Ordnung: $|\chi| \ll 1$
 - $\chi > 0$: Paramagnet
 - $\chi < 0$: Diamagnet

- mit magnetische Ordnung: $|\chi| \gg 1$
 - $\chi > 0$: Ferromagnet
 - $\chi < 0$: Antiferromagnet