**Aufgaben zur Experimentalphysik II: Elektrostatik I**

**Musterlösung**

William Hefter - 24/02/2009

# 1 Ladung, Coulomb-Gesetz, E-Feld

1. **(a)** Bedingung ist hier

$$\begin{aligned} F_{el} &= F_g \Leftrightarrow \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = G\frac{m_e m_m}{r^2} \\ &\Rightarrow \quad Q = \sqrt{G m_e m_m 4\pi\epsilon_0} = 5,7\cdot 10^{13}\text{C} \end{aligned}$$

   Die Entfernung fällt heraus, da die beiden Gesetze aufgrund ihrer Symmetrie beide proportional zum Abstandsquadrat sind.
   **(b)** Wasserstoff besitzt genau ein Proton, hat also die Ladung $e = 1,7\cdot 10^{-19}$C, damit:

$$\frac{q}{e} = \frac{5,7\cdot 10^{13}\text{C}}{1,6\cdot 10^{-19}\text{C}} = 3,6\cdot 10^{32}\text{Ionen}$$

   Ein Wasserstoffion hat die Masse $m = \frac{1}{N_A}M = 1,66\cdot 10^{-27}$kg, die benötigte Gesamtmasse ist also

2. Geometrische Beziehungen: $\frac{x}{2} = L\sin\theta$ sowie $F_{el}\cos\theta = F_g\sin\theta$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2}\cos\theta &= mg\sin\theta \\ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2} &= mg\tan\theta \approx mg\sin\theta = \frac{x}{2L}mg \\ x &= \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

3. **(a)** Das Gesamtdrehmoment verschwindet. Die Ladungen links tragen ein positives Drehmoment bei, die rechts ein negatives und das Gewicht ein positives. Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 h^2}\frac{L}{2} + Wg(x - \frac{L}{2}) - \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 h^2}\frac{L}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{L}{2}\left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 h^2 Wg} + 1\right) \end{aligned}$$

4. Wir setzen $x_1 = 0, x_2 = 50$cm. Da die beiden Ladungen unterschiedliche Vorzeichen haben, kann sich die Gleichgewichtslage nicht dazwischen befinden. Ferner muss sie näher bei $q_1$ sein, da dies die schwächere Ladung ist. Ferne gilt Superposition und aufgrund der 1-dimensionalität können wir das E-Feld als Skalar schreiben:

$$\begin{aligned} E &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(x-x_2)^2}\right) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} &= \frac{4}{(x-x_2)^2} \\ \Leftrightarrow x - x2 &= 2x \\ \Leftrightarrow x &= -x_2 \end{aligned}$$

   Also: $x = -50$cm ist eine Gleichgewichtslage.

5. **(a)** Der Stab ist homogen geladen, also gilt einfach $\lambda = \frac{-q}{L}$.
**(b)** Das Feld eines kleines Stabstückchens ist gerade

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{(x+a)^2}$$

Das Gesamtfeld ergibt sich einfach durch Integrieren über den Stab:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^L dE = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-1}{x+a}\right]_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{a(L+a)} \\ &\overset{\lambda=-q/L}{=} \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a(L+a)} \end{aligned}$$

Das Minuszeichen deutet darauf hin, dass das Feld weg vom negativ geladenen Leiter zeigt.
**(c)** Für $a \gg L$ ist $(L+a) \approx a$ und

$$E = -\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Was dem Feld einer Punktladung entspricht.

6. Eine geladene Scheibe besteht aus vielen geladenen Ringen mit Ladungen $dq = \sigma 2\pi r dr$. Das Feld eines Rings war

$$d\vec{E}_r = \vec{e}_z\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{zdq}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \vec{e}_z\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z\sigma 2\pi r dr}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Zur Bestimmung des Gesamtfeldes integrieren wir einfach über die Scheibe, also

$$\begin{aligned} \vec{E}_s &= \int_0^R d\vec{E}_r \\ &= \vec{e}_z\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_0^R dr\frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \vec{e}_z\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{-1}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right]_0^R \\ &= \vec{e}_z\frac{-\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}} - \frac{1}{z}\right] \\ &= \vec{e}_z\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right] \end{aligned}$$

Für $z \approx 0$ oder $R \gg z$ geht dieses Feld über in

$$\vec{E} = \vec{e}_z\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

was dem mit dem Gauß'schen Satz ausgerechneten Feld entspricht. Man sieht, dass das Gauß'sche Gesetz solche Berechnungen wesentlich vereinfachen kann.

7. Die Aufgabe entspricht dem schiefen Wurf, man hat nur das Gravitationsfeld durch ein E-Feld ersetzt. Das E-Feld ist $\vec{E} = 2\frac{kV}{m}\vec{e_y} = E_0\vec{e_y}, \vec{v_0} = \frac{6\cdot 10^6 \frac{m}{s}}{\sqrt{2}}(\vec{e_x}+\vec{e_y}) = v_0(\vec{e_x}+\vec{e_y})$. Die Beschleunigung findet man aus

$$\begin{aligned} \vec{F_{el}} &= q\vec{E} = -eE_0\vec{e_y} = m\vec{a} \\ \Leftrightarrow \vec{a} &= -\frac{e}{m}E_0\vec{e_y} = a\vec{e_y} \end{aligned}$$

**(a)** Wir suchen also das Maximum von $y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$. Es ist $\dot{y}(t) = v_0 - at \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{a}$. Eingesetzt in $y(t)$ ergibt sich $y_{max} = 2{,}56$cm. Also könnte das Elektron die obere Platte treffen.
**(b)** Wir suchen nun die Zeit, für die $y = d$. Eingesetzt und aufgelöst ergibt sich

$$t_d = \frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{4a^2} - \frac{d}{2a}}$$

wobei wir die negative Lösung verwenden, da wir die früheste Zeit wollen. Wir finden

$$t_d = 6,43 \cdot 10^{-9}\text{s} \Rightarrow x(t_d) = 2,72\text{cm}$$

## 2 Gauß'scher Satz

1. Das E-Feld steht senkrecht auf allen Seiten ausser der oberen und unteren, also tragen nur diese bei. Im Fall der oberen Seite ist das Feld antiparallel, bei der unteren Parallel zum Normalenvektor. Also ist, mit $A = 100 \cdot 100\text{m}^2$:
$$q = \epsilon_0 \phi_e = \epsilon_0 (A \cdot E(200m) - A \cdot E(300m)) = 3,54\mu\text{C}$$

2. **(a)** Man betrachte eine Gauß'sche Oberfläche, die vollständig innerhalb des Leiters liegt, den Rand nicht umschliesst, jedoch den Hohlraum. Das E-Feld muss überall auf dieser Fläche 0 sein, da wir sonst einen Strom im Leiter beobachten würden. Dies ist nicht der Fall. Also liegt eine Nettoladung von 0C in der Oberfläche, was wiederum bedeutet, dass sich auf der Wand des Hohlraums eine Ladung von $-3 \cdot 10^{-6}$C befinden muss.
**(b)** Nach Außen muss der Leiter wie eine einzelne Ladung, bestehend aus den darin enthaltenen Einzelladungen, aussehen. Folglich befindet sich auf der Oberfläche eine Ladung von $13 \cdot 10^{-6}$C.

3. **(a)** Wir legen eine zylindrische Gauß'sche Oberfläche der Länge $L$ und mit Radius $r$ um die gesamte Anordnung. Aus Symmetriegründen muss das E-Feld überall auf der Oberfläche senkrecht stehen und parallel zum Normalenvektor sein, also wird das Flußintegral besonders einfach. Die eingeschlossene Ladung ist gerade $Q = q - 2q = -q$, und
$$\begin{aligned} \oint \vec{E} d\vec{A} &= EA = E2\pi r L = \frac{-q}{\epsilon_0} \\ \Leftrightarrow \vec{E} &= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 r L}\vec{e_r} \end{aligned}$$
Das Minuszeichen deutet an, dass das E-Feld nach Innen gerichtet ist.
**(b)** Wir legen eine zylindrische Gauß'sche Oberfläche in die Röhre rein, so dass sie die innere Seite mit einschliesst, nicht jedoch die äußere. Da wir uns in einem Leiter befinden, ist das Feld 0, also muss auch die enthaltene Ladung gleich 0 sein. Auf dem inneren Zylinder befindet sich die Ladung $q$, folglich liegt auf der inneren Wand der Röhre die Ladung $-q$. Nach Außen hin muss die Anordnung die Gesamtladung $-q$ vorzeigen, also muss auf der äußeren Oberfläche nochmals die Ladung $-q$ liegen.
**(c)** Überlegung ist völlig analog zu (a), nur dass der Zylinder diesmal nur den inneren Stab und somit die Ladung $q$ einschliesst. Also ist das Feld
$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r L}\vec{e_r}$$

4. Das Feld einer leitenden Metalloberfläche ist gegeben durch $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Die Arbeit, die das Feld am Elektron verrichtet, ist gerade gleich $W = -F_{el} d = -e\frac{\sigma}{\epsilon_0}d$. Laut Angabe hat das Elektron mit 100eV gerade genug Energie, um die Platte zu erreichen, also ist
$$\begin{aligned} W &= -e\frac{\sigma}{\epsilon_0}d = 100\text{eV} = 100 \cdot \text{e} \cdot \text{J} \\ \Leftrightarrow d &= 4,4 \cdot 10^{-4}\text{m} \end{aligned}$$

5. Die passende Gauß'sche Oberfläche ist in allen Fällen natürlich eine Kugelfläche $A = 4\pi r^2$.
**(a)** $\mathbf{r} < \mathbf{a}$ : Die Kugel trägt die Ladung $+q$, daraus folgt die homogene Ladungsdichte $\rho_k = \frac{q}{4/3\pi a^3}$. Wir legen eine Gauß'sche Kugelfläche in die Kugel und finden: Das Feld ist radialsymmetrisch und überall parallel zum Normalenvektor, also $\vec{E} d\vec{A} = E dA$, also:
$$\begin{aligned} \oint \vec{E} d\vec{A} &= E4\pi r^2 = \frac{\rho_k \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \\ \Leftrightarrow E &= \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \end{aligned}$$

**(b) $\mathbf{a < r < b}$** :Die eingeschlossene Ladung ist hier gerade die Ladung auf der inneren Kugel, also $q$:

$$\begin{aligned}\oint \vec{E}d\vec{A} &= E4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \\ \Leftrightarrow E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\end{aligned}$$

was dem bekannten Feld einer Punktladung entspricht.
**(c)** Die Kugelschale ist leitend, also liegen die Ladungen auf den Rändern und das Feld im Innern ist Null.
**(d)** Das System verhält sich wie eine Punktladung mit Gesamtladung $q - q = 0$, also verschwindet dessen Feld.
**(e)** Die Ladung auf der inneren Kugelschale wird influenziert durch die der Kugel, muss sie also ausgleichen und muss daher gerade $-q$ sein. Alternativ der Beweis über eine Gauß'sche Fläche, die innerhalb der Kugelschale liegt. Die Ladung auf der inneren Seite der Kugelschale ist gerade gleich der Gesamtladung auf der Kugelschale, somit ist die Ladung auf der äußeren Seite gleich 0.

6. Wir legen eine Gauß'sche Kugelfläche in die Kugelschale. Am Ort $a < r < b$ ist die eingeschlossene Ladung dann gerade gleich der Punktladung plus der inhomogenen Raumladung der Schale. Diese ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}Q &= \int_V dV\rho = \int_a^r dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\theta' r'^2 \sin\theta \frac{A}{r'} \\ \Leftrightarrow Q &= 4\pi \int_a^r dr' Ar' = 2\pi A(r^2 - a^2)\end{aligned}$$

Aus dem Gauß'schen Satz folgt dann das Feld

$$E = \frac{Q+q}{\epsilon_0} = \frac{A}{2\epsilon_0} - \frac{Aa^2}{2r^2\epsilon_0} + \frac{q}{4\pi r^2\epsilon_0}$$

Das Feld ist homogen, falls die rechte Seite unabhängig von $r$ ist, also muss

$$\begin{aligned}\frac{Aa^2}{2r^2\epsilon_0} &= \frac{q}{4\pi r^2\epsilon_0} \\ \Leftrightarrow A &= \frac{q}{2a^2}\end{aligned}$$

## 3 Das elektrostatische Potential

1. Die Ladungsdichte ist gerade $\rho = \frac{q}{4/3\pi R^3}$ und die eingeschlossene Ladung innerhalb einer Gauß'schen Fläche des Radius $r < R$ ist dann $Q = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = q\frac{r^3}{R^3}$. Für das Feld folgt aus $\int \vec{E}d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$.

   a) Es sei nun $\phi = 0$ bei $r = 0$.

      i. Die Abhängigkeit des Potentials erhält man über

$$\begin{aligned}\phi(r) - \underbrace{\phi(0)}_{Nullpunkt} &= -\int_0^r Edr \\ \phi(r) - 0 &= -\int_0^r \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ \phi(r) &= -\frac{qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}\end{aligned}$$

ii. Da $\phi(0) = 0$ ist jedes mit dem Ergebnis aus i) berechnete Potential gerade die Potentialdifferenz zum Mittelpunkt, für $r = R$ folgt

$$\phi(R) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

iii. Alle Punkte außerhalb des Ursprungs haben negatives Potential, also ist der Ursprung gerade der Punkt des höchsten Potentials.

b) Hier müssen wir zur Bestimmung des Potentials anders vorgehen. Wir kennen die Formel für die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten, im Speziellen gilt hier deshalb

$$\phi(R) - \phi(r) = -\int_r^R E dr = -\int_r^R \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3}(R^2 - r^2)$$

Die linke Seite enthält aber auch das bekannte Potential auf der Oberfläche einer Punktladung, nämlich $\phi(R)$, also ist

$$\begin{aligned}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \phi(r) &= -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3}(R^2 - r^2) \\ \Leftrightarrow \phi(r) &= \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}\end{aligned}$$

Die Potentialdifferenz zum Ursprung ist

$$\begin{aligned}\phi(R) - \phi(0) &= \frac{2q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} \\ &= \frac{-q}{8\pi\epsilon_0 R}\end{aligned}$$

Das Potential innerhalb der Kugel ist also anders als das in a) bestimmte, die Differenz zwischen Oberfläche und Ursprung aber gleich. Dies liegt ganz einfach an der Definition des Nullpunkts. Die Angabe eines absoluten Potentials ist direkt von diesem Abhängig, bei einer Differenz kürzen sich die Eichfaktoren jedoch raus.

2. Das skalare Potential an einem beliebigen Ort ist einfach die skalare Summe des Potentiale der einzelnen Punktladungen. Mit $l = 0,15$m, $b = 0,05$m:

**(a)**

$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_1}{l} + \frac{q_2}{b}\right] = 60\text{kV}$$

**(b)**

$$\phi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{l}\right] = -780\text{kV}$$

**(c)** Die kinetische Energie am Anfang und Ende ist 0, also entspricht die Arbeit gerade $W = q_3\Delta\phi = q_3(\phi_A - \phi_B) = 2,5$J

**(d)** Die Arbeit wird von einer externen Kraft verrichtet, also erhöht sich die Energie des Systems.

**(e)** Die elektrostatische Kraft ist konservativ, also ist die Arbeit wegunabhängig.

3. Wir benötigen das Potential eines langen Drahtes. Das Feld eines solchen Drahtes war gegeben durch

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten in diesem Feld ist gegeben durch

$$\Delta\phi = \phi_{r_f} - \phi_{r_i} = -\int_{r_i}^{r_f} E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_i}{r_f}$$

In unserem Fall ist $\Delta\phi$ die Potentialdifferenz zwischen dem Draht ($r_i$) und dem Zylinder ($r_f$), also ist

$$\Delta\phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_d}{r_z} = 850\text{V}$$

Wir wollen einen Ausdruck für $\lambda$, also:

$$\lambda = \frac{\Delta\phi 2\pi\epsilon_0}{\ln\frac{r_d}{r_z}}$$

Damit wird das Feld zu

$$E = \frac{\Delta\phi}{r\ln\frac{r_d}{r_z}}$$

**(a)** Oberfläche des Drahtes: $r = r_d$

$$E = \frac{\Delta\phi}{r_d\ln\frac{r_d}{r_z}} = 1,36\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

**(b)** Oberfläche des Zylinders: $r = r_z$

$$E = \frac{\Delta\phi}{r_z\ln\frac{r_d}{r_z}} = 8,82\cdot 10^3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

4. Die vollständige Gleichung für das Potential ist

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Der beobachtete Punkt liegt jedoch auf der z-Achse, d.h. der Abstand zum Ring ist gerade $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{R^2+z^2}$ und ein kleines Ladungselement ist gerade $dq = \lambda ds = \lambda R d\varphi$. Das Integral vereinfacht sich also auf die Berechnung eines $d\varphi$-Integrals:

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}\int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi R\lambda}{\sqrt{R^2+z^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2+z^2}}\end{aligned}$$

Das $\vec{E}$-Feld ist gegeben durch

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$

In Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus der Vorlesung. Die Berechnung des Potentials ist hier um einiges schneller als die des Feldes.

5. Das skalare Potential lässt sich einfach addieren, daher folgt

$$\phi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{5}{2d}-\frac{5}{d}+\frac{5}{d}+\frac{5}{d}\right] = \frac{5q}{8\pi\epsilon_0}$$

6. Für eine Ladung, die sich durch eine Potentialtialdifferenz bewegt, gilt

$$\Delta E = q\Delta\phi = 3\cdot 10^{10}\mathrm{J}$$

## 4 Kapazität und Kondensator

1. Wir gehen analog zur Vorlesung vor. Das Feld zwischen den beiden Zylindern ist gegeben durch

$$\int \vec{E}d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{q}{2\pi r L\epsilon_0}$$

wobei $q$ die Ladung auf dem inneren Zylinder bezeichnet. Die Spannung (wir brauchen nur den Betrag) ist gegeben durch

$$U = \int_a^b E dr = \frac{q}{2\pi L \epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Die Kapazität ist dann einfach

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi L\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}$$

2. Selbes Vorgehen wie bei 7., nur ist das Feld

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

und $U$

$$\begin{aligned} U &= \int_a^b E dr = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{b-a}{ab}\right] \end{aligned}$$

Und damit folgt für $C$

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

Wir wollen nun die Kapazität der Erde ausrechnen, setzen also $a = R_e = 6370\text{km}$ und schreiben

$$\begin{aligned} C &= 4\pi\epsilon_0 \frac{a}{1-\frac{a}{b}} \\ \lim_{b\to\infty} C &= 4\pi\epsilon_0 R_e = 0,71\mu\text{C} \end{aligned}$$

3. Die auf dem Kondensator der Kapazität $C_1 = 100\text{pF}$ bei einer Spannung von $U_1 = 50\text{V}$ gespeicherte Ladung ist $q = C_1 U_1 = 5\mu\text{F}$. Wird nun die Batterie abgeklemmt und ein zweiter Kondensator parallel geschaltet, bleibt die Ladung erhalten, aber die Spannung sinkt, da sich die Kapazität erhöht. In einer Parallelschaltung fällt über jedem Zweig dieselbe Spannung ab, also gilt $C = C_1 + C_2$ und $q = CU_2 = (C_1 + C_2)U_2 \Leftrightarrow C_2 = \frac{q}{U_2} - C_1 = 43\text{pF}$.

4. Die Kapazität des Plattenkondensators ist gegeben durch $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$, die Ladung durch $q = CU = \epsilon_0 \frac{A}{d} U$.
**(a)** Ladung bleibt erhalten, da die Batterie abgeklemmt ist, also ist $q = \epsilon_0 \frac{A}{d} U = \epsilon_0 \frac{A}{2d} U_2 \Leftrightarrow U_2 = 2U$. Die Spannung verdoppelt sich.
**(b)** Die gespeicherte Energie in einem Kondensator ist gerade $E = \frac{1}{2} C U^2$, also: $E_i = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{A}{d} U^2$, $E_f = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{A}{2d}(2U)^2 = \epsilon_0 \frac{A}{d} U^2$ : Die Energie verdoppelt sich.
**(c)** Die zum Auseinanderziehen erforderliche Arbeit muss gerade gleich dem Unterschied der gespeicherten Energie sein, also $W = \epsilon_0 \frac{A}{d} U^2$.

## 5 Materie im elektrischen Feld: Dielektrika

1. Diese Betrachtungen gelten für Kondensatoren mit $\vec{E} \parallel$ zur Oberfläche des Kondensators und des Dielektrikums. $\vec{E}_0$, $q_0$ und $\sigma_0$ gelten für den Plattenkondensator ohne Dielektrikum. Mit dem Satz von Gauß stellt man fest

$$E_0 A = \frac{q_0}{\epsilon_0} \Rightarrow E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

Das Nettofeld $\vec{E}'$ im Dielektrikum wird von der Gesamtladung $q_0 - q_{ind}$ erzeugt, es gilt also

$$E' = \frac{\sigma_0 - \sigma_{ind}}{\epsilon_0}$$

Laut Vorlesung muss dies entsprechen:

$$E' = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Gleichsetzen und Auflösen ergibt schliesslich

$$\sigma_{ind} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma_0$$

Dies ist $< \sigma_0$ für $\epsilon_r > 1$, wie es der Fall sein sollte. Um $\left|\vec{P}\right| = \sigma_{ind}$ zu zeigen:

$$\left|\vec{P}\right| = \epsilon_0 \chi \left|\vec{E}'\right| = \epsilon_0 \left(\epsilon_r - 1\right) \left|\vec{E}'\right| = \epsilon_0 \left(\epsilon_r - 1\right) \frac{\sigma_0 - \sigma_{ind}}{\epsilon_0}$$

Auflösen ergibt

$$\left|\vec{P}\right| = \sigma_{ind}$$

2. In beiden Fällen gilt weiter

$$E_0 A = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Dies kann man sich durch ein paar Berechnungen klar machen (Übung!). Zur eigentlichen Berechnung reicht aber das Berechnen der Spannung, um die Kapazität per $C = \frac{q}{U}$ ausrechnen zu können. Der Kondensator trägt die Ladung $q$, hat die Fläche $A$ und ein "Feld ohne Dielektrika" $E_0$.

a) **Parallelschaltung:** Es sind *zwei* Spannungen zu berechnen, zwischen den Kondensatorflächen, die von unterschiedlichen Dielektrika "bedeckt" sind, herrschen nämlich unterschiedliche Spannungen. Diese sind

$$U_i = \int_-^+ E_i \, ds = E_i d = \frac{E_0}{\epsilon_i} d$$

Wie setzt sich nun die Gesamtspannung aus diesen beiden Spannungen zusammen? Die Antwort ist: Entsprechend der Regel für eine Parallelschaltung von Widerständen, d.h.

$$U = \frac{1}{\frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2}} = E_0 d \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

Damit ist die Kapazität

$$C = \frac{q}{U} = \frac{E_0 A \epsilon_0}{E_0 d \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} = \epsilon_0 \left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right) \frac{A}{d}$$

Bei Verwenden der Regel für Parallelschaltung von Kondensatoren hätten wir direkt erhalten:

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \epsilon_1 \frac{A}{d} + \epsilon_0 \epsilon_2 \frac{A}{d} = \epsilon_0 \left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right) \frac{A}{d}$$

b) **Reihenschaltung:** Dieser Fall ist einfacher, weil die Gesamtspannung $U$ direkt zu berechnen ist. Die Dielektrika sollen die Dicke $d_1$ und $d_2$ haben.

$$U = \int_-^+ E \, ds = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{E_0}{\epsilon_1} d_1 + \frac{E_0}{\epsilon_2} d_2 = E_0 \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}\right)$$

Und die Kapazität:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{E_0 A \epsilon_0}{E_0 \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}\right)} = \epsilon_0 \frac{A}{\left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}\right)}$$

Zur Kontrolle die direkte Berechnung nach der Regel für Serienschaltung von Kondensatoren:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_1 A / d_1} + \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_1 A / d_2}} = \epsilon_0 \frac{A}{\left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}\right)}$$

3. Die Lösung besteht darin, sich den Kondensator als Parallelschaltung von unendlich vielen unendlich dünnen Kondensatoren mit den zwei in Reihe geschalteten Dielektrika zu denken. Ein solcher dünner Kondensator hat hier die Fläche $A = b\,dx$ und die Kapazität

$$dC = \epsilon_0 b\, dx\, \frac{1}{\frac{d_1(x)}{\epsilon_1} + \frac{d_2(x)}{\epsilon_2}}$$

wobei $d_1(x) = d - \frac{d}{a}x$ und $d_2(x) = \frac{d}{a}x$ die Dicken der beiden Dielektrika sind. Wir vereinfachen zunächst den Bruch:

$$\frac{d_1(x)}{\epsilon_1} + \frac{d_2(x)}{\epsilon_2} = \frac{d - \frac{d}{a}x}{\epsilon_1} + \frac{\frac{d}{a}x}{\epsilon_2} = d\left(\frac{1}{a}\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2\epsilon_1}\left(x + a\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 - \epsilon_1}\right)\right)$$

Bei einer Parallelschaltung addieren sich einfach die Kapazitäten, die Gesamtkapazität ist also

$$\begin{aligned}
C &= \int_0^a dC \\
&= \epsilon_0 b \frac{a}{d}\frac{\epsilon_2\epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1}\int_0^a dx\, \frac{1}{\left(x + a\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 - \epsilon_1}\right)} \\
&= \epsilon_0 b \frac{a}{d}\frac{\epsilon_2\epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1}\left[\ln\left(x + a\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 - \epsilon_1}\right)\right]_{x=0}^{x=a} \\
&= \epsilon_0 b \frac{a}{d}\frac{\epsilon_2\epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1}\ln\left(2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)
\end{aligned}$$

Für $\epsilon_2 \to \epsilon_1$ ist dies zunächst ein singulärer Ausdruck, nämlich $\frac{0}{0}$. Wir können also l'Hospital anwenden:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon_2 \to \epsilon_1} C &= \lim_{\epsilon_2 \to \epsilon_1} \epsilon_0 b \frac{a}{d}\epsilon_2\epsilon_1 \frac{\frac{d}{d\epsilon_2}\ln\left(2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)}{\frac{d}{d\epsilon_2}\left(\epsilon_2 - \epsilon_1\right)} \\
&= \lim_{\epsilon_2 \to \epsilon_1} \epsilon_0 b \frac{a}{d}\epsilon_2\epsilon_1 \frac{\frac{1}{2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2^2}\right)}{1} \\
&= \epsilon_0\epsilon_1 \frac{ba}{d} \\
&= \epsilon_0\epsilon_1 \frac{A}{d}
\end{aligned}$$

Was einem Kondensator mit einem Dielektrikum entspricht.