Experimentalphysik II: Elektrostatik I

Ferienkurs Wintersemester 08/09

William Hefter

24/02/09

Inhaltsverzeichnis

1 Elektrostatik

1.1 Elektrische Ladung, Coulomb-Kraft

Die elektrische Ladung ist eine elementare, intrinsische Eigenschaft der sie tragenden Elementarteilchen. Sie ist quantisiert; die kleinste[1] Ladungseinheit ist die **Elementarladung**

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$$

mit der SI-Einheit *Coulomb*. Alle frei vorkommenden Ladungen sind ganzzahlige Vielfache davon. Sie wurde erstmals 1910 gemessen von **Milikan** über die Fallgeschwindigkeit von geladenen Öltröpfchen in einem Kondensator.

Die Ladung eines abgeschlossenen Systems ist **erhalten** und kann nicht vernichtet, aber übertragen werden.

Wir unterscheiden *positive* und *negative* Ladungen; diese ziehen sich an, zwei gleiche stoßen sich ab.

Zwei Ladungen üben aufeinander die

Coulomb-Kraft $$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r}$$

aus. ϵ_0 ist die **Dielektrizitätskonstante** des Vakuums:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{A^2 s^4}}{\mathrm{kg\,m^3}} \qquad \left(\frac{\mathrm{A^2 s^4}}{\mathrm{kg\,m^3}} = \frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{N\,m^2}}\right)$$

Das Coulomb-Gesetz ähnelt strukturell dem Gravitationsgesetz und teilt mit diesem auch zwei wesentliche Eigenschaften:

- Eine homohen geladene Kugel übt diesselbe Kraft aus wie eine sich in ihrer Mitte befindliche Punktladung.
- Im Inneren einer homogen geladenen Kugelschale ist die Gesamtkraft = 0.

1.2 Das elektrische Feld

Ganz analog zu einer Masse baut auch eine Ladung ein Feld auf, das auf andere Ladungen wirkt. Man definiert dieses über die Kraft, die auf eine Testladung q wirkt:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad \left[\vec{E}\right] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Als Visualisierungshilfe diesen die **Feldlinien**, die aus positiven Ladungen austreten und in negativen Ladungen enden. Die Dichte der Feldlinien repräsentiert die Stärke des Feldes.

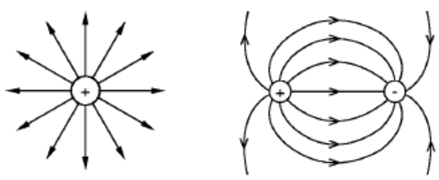


Abbildung 1: Feldlinien als Visualisierungshilfe.

Da sowohl die Coulomb-Kraft als auch das elektrische Feld Vektorgrößen sind, gilt das lineare Superpositionsgesetz:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \qquad \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

[1] Die Bausteine der Nukleonen, die **Quarks**, tragen Bruchteile dieser Ladung, kommen jedoch nicht frei in der Natur vor.

Das $\vec{E}$-Feld einer Punktladung der Größe q folgt unmittelbar aus dem Coulomb'schen Gesetz:

$\vec{E}$-Feld einer Punktladung: $$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r}$$

Jede Ladungsverteilung lässt sich als Ansammlung von Punktladungen ansehen, wobei aus der Linearität der Feldgleichungen (i.A. der Maxwellgleichungen) die Möglichkeit der Superposition folgt:

$\vec{E}$-Feld einer beliebigen Ladungsverteilung: $$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V dV\,\rho\left(\vec{r}'\right)\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}}$$

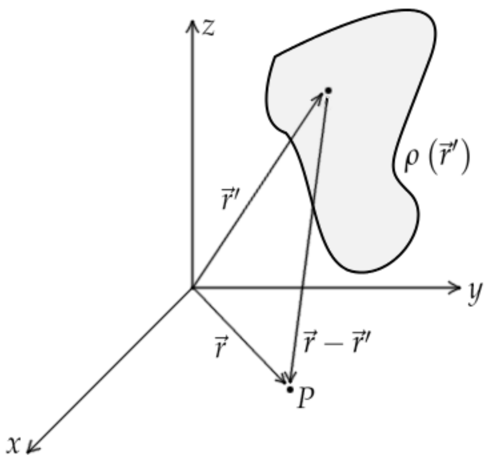


Abbildung 2: Zur Berechnung des elektrischen Feldes einer Ladungsverteilung.

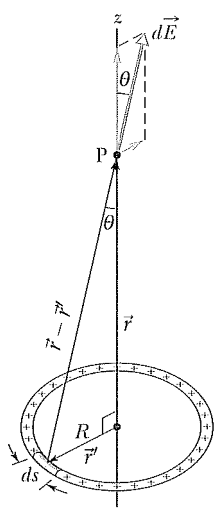
Dies entspricht einer Überlagerung der Felder aller Punktladungen im Volumen V am Punkt $\vec{r}$. $\rho\left(\vec{r}\right)$ (mit Einheit $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}$) ist die **Volumenladungsdichte** am Ort $\vec{r}$.

Analog:

- λ mit Einheit $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}$ ist eine Längenladungsdichte.
- σ mit Einheit $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$ ist eine Flächenladungsdichte.

Praktische Implementierung: Auswählen der passenden Ladungsdichte und Berechnung des Feldes einer infinitesimalen Ladung dq.

Beispiel: $\vec{E}$-Feld eines Rings entlang der Zentralachse



1. Passende Ladungsdichte: Ring mit Radius R und Gesamtladung $q \Rightarrow$ Lägenladungsdichte $\lambda = \frac{q}{2\pi R} \Rightarrow$ Ladungselement $dq = \lambda ds$. Infinitesimales Feldelement:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \lambda ds$$

2. Wähle geeignete Koordinaten - hier Zylinderkoordinaten - um das Integral möglichst einfach zu machen

$$\begin{aligned} ds &= R d\varphi' \\ \vec{r} &= \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Lege die Anordnung so, dass sich die Ausdrücke möglichst vereinfachen - hier soll der Ring in der $z = 0$-Eben liegen:

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}') &= \begin{pmatrix} r\cos\varphi - r'\cos\varphi' \\ r\sin\varphi - r'\sin\varphi' \\ z - z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi' \\ -R\sin\varphi' \\ z \end{pmatrix} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{R^2 + z^2} \end{aligned}$$

4. Ausrechnen:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -R\cos\varphi' \\ -R\cos\varphi' \\ z \end{pmatrix} \\ &= \vec{e_z} \frac{2\pi\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \vec{e_z} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Man sieht: das direkte Ausrechnen des $\vec{E}$-Feldes ist mühsam und meistens nur in einfachen Fällen möglich. Bei Vorhandensein von Symmetrien nutzt man daher eine einfachere Methode, den Satz von Gauß.

1.3 Der Satz von Gauß

Hinweis: Es werden im Folgenden immer nur einfach Integralsymbole verwendet, egal ob für Flächen- oder Volumenintegrale. Die Interpretation sollte aus dem Kontext ersichtlich sein.

Allgemein lautet der **Satz von Gauß** für ein Vektorfeld $\vec{v}$ innerhalb eines Gebietes V mit Rand $\partial V = A$:

$$\oint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_V \mathrm{div}\vec{v}\, dV$$

In Worten:

> Der Fluss durch eine geschlossene Oberfläche entspricht der Summe der Quellen und Senken innerhalb der Oberfläche.

Dieser Satz lässt sich hier auf das elektrische Feld anwenden. Dafür definieren wir zunächst den **elektrischen Fluß** durch eine Oberfläche:

$$\boxed{\phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

wobei die Orientierung der Fläche das Vorzeichen bestimmt. Für geschlossene Oberflächenintegrale, wie sie hier stets vorkommen werden, zeigt der entsprechende Normalenvektor immer vom umschlossenen Volumen nach Außen.

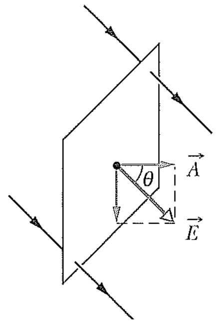


Abbildung 3: Veranschaulichung des elektrischen Flußes durch eine Oberfläche.

Wir können den allgemeinen Satz von Gauß verwenden, um einen "Satz von Gauß" für das elektrische Feld aufzustellen, um dessen Berechnung zu vereinfachen. Dazu integrieren wir die 1. Maxwell-Gleichung

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

über ein Volumen V, das eine Ladungsverteilung $\rho\left(\vec{r}\right)$ enthält:

$$\int_V \mathrm{div}\vec{E}\, dV = \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{\epsilon_0}\, dV$$

Die linke Seite vereinfacht sich mit dem allgemeinen Satz von Gauß zum Oberflächenintegral über das elektrische Feld:

$$\int_V \mathrm{div}\vec{E}\, dV = \oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

und das Volumenintegral über die Ladungsverteilung ergibt einfach die eingeschlossene Ladung q. Insgesamt ergibt sich dann

"Satz von Gauß" $$\boxed{\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

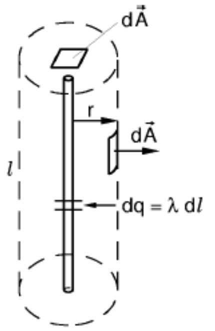
In Worten:

> Der elektrische Fluß durch eine geschlossene Oberfläche entspricht gerade der in ihr enthaltenen Gesamtladung, mit einem Faktor $\frac{1}{\epsilon_0}$.

Der wesentliche Trick besteht darin, eine passende Oberfläche zu wählen, so dass sich das Flussintegral leicht auswerten lässt.

Beispiel: Zylindersymmetrie

Zur Berechnung des $\vec{E}$-Feldes eines unendlich langen, dünnen Drahtes mit Längenladungsdichte λ legt man eine Zylinderoberfläche um den Draht, siehe Abbildung:



- Die Deckel tragen nichts bei, da hier $\vec{E} \perp d\vec{A}$
- $\vec{E}$ steht stets senkrecht auf den Mantelflächen, d.h. $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E\,dA$

Dann geht's schnell:

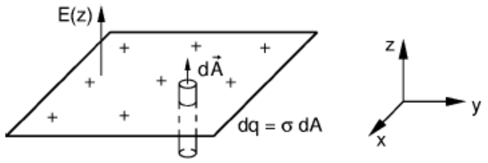
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E\,dA = E2\pi rh = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Für einen unendliche langen Draht folgt somit:

$$\Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

Beispiel: Planare Symmetrie

Unendlich ausgedehnte Ebene mit Flächenladungsdichte σ:



- $\vec{E}$ kann aus Symmetriegründen nur eine Normalkomponente haben.
- $\vec{E}$ ist also parallel zu den Normalenvektoren der Deckelflächen, davon gibt es zwei.

Es folgt zunächst:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2EA = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

und somit für eine unendlich ausgedehnte Fläche:

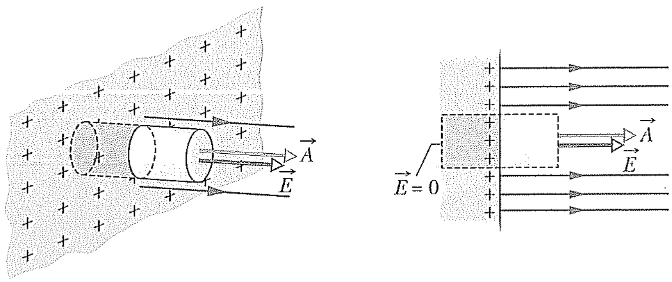
$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Zwei Folgerungen des Satz von Gauß sind:

- Eine homohen geladene Kugel sieht nach außen aus wie eine in ihrer Mitte befindliche Punktladung.
- Im innern eines geladenen Leiters existiert kein elektrisches Feld. Wäre dies nicht der Fall, so würde ein Strom im Innern des Leiters fließen; dies widerspricht unserer Erfahrung.

Der letzte Punkt bedeutet auch:

> Die Überschussladungen auf einem Leiter befinden sich auf dessen Oberfläche.



Daraus folgt für das $\vec{E}$-Feld auf der Oberfläche eines Leiters:

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow E &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

1.4 Das elektrische Potential

Aus rot$\vec{E} = 0$ folgt, dass das $\vec{E}$-Feld konservativ ist. Daher muss es ein Gradientenfeld sein und ein Potential besitzen. Zur "Herleitung" dieses Potentials überlegt man sich folgendes:

Die Arbeit in einem konservativen Kraftfeld ist gerade

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

und das Potential ist dadurch definiert als

$$\Delta\varphi = \varphi_{\vec{r}_f} - \varphi_{\vec{r}_i} = -W = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Dies ist die Potentialänderung, die an einer Ladung über die durch die Coulombkraft verrichtete Arbeit hervorgerufen wird.

Die Vorzeichen sind etwas kniffelig. Angenommen, wir haben eine positive Ladung. Dann ist die Coulomb-Kraft in radialer Richtung positiv, die Arbeit beim Verschieben einer zweiten positiven Ladung *weg* von der ersten auch, wir kriegen also Energie raus. Die Potentialänderung ist negativ, was anschaulich Sinn macht: die Ladungen stoßen sich weniger stark ab, weil sie weiter auseinander sind, also ist das Potential gesunken. Verschieben wir nun eine *negative* Ladung weg von einer positiven, ist die Arbeit negativ, wir stecken also Energie in das System rein. Das Potential hingegen nimmt zu!

Wir wählen einen festen Referenzpunkt $\vec{r}_i$ und setzen das Potential dort $= 0$; damit kann jedem Punkt im Raum eine potentielle Energie zugeordnet werden:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_{\vec{r}} - \underbrace{\varphi_{\vec{r}_i}}_{=0} = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Im Allgemeinen wird der Referenzpunkt bzw. Nullpunkt ins Unendliche gesetzt.

Analog zur Definition des elektrischen Feldes als "Kraft pro Ladung" definiert man nun das **elektrostatische Potential** als "Potential pro Ladung":

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\varphi(\vec{r})}{q} = -\frac{1}{q}\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

elektrostatisches Potential: $$\boxed{\phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Also: **das $\vec{E}$-Feld ist das Gradientenfeld des elektrischen Potentials**:

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi}$$

Die **elektrische Spannung** entspricht gerade einer Potentialdifferenz:

$$U = \phi(\vec{r}_a) - \phi(\vec{r}_b) = \frac{\varphi(\vec{r}_a) - \varphi(\vec{r}_b)}{q} = \frac{-W}{q} \qquad [U] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} \equiv \mathrm{V}$$

$$= -\int_{\vec{r}_b}^{\vec{r}_a} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

also der "Arbeit pro Ladung", die benötigt wird, um eine Ladung q von einem Ort an den anderen zu verschieben.

Wichtig: die elektrische Spannung ist eine Potential**differenz**, kein absoluter Wert. Während das Potential absolut ist bzgl. eines Referenzpunktes, fällt dieser Referenzpunkt bei der Spannung raus. Eine Spannung ist also unabhängig vom Referenzpunkt des Potentials.

Umgekehrt ist die Energie, die ein Teilchen bekommt, wenn es eine Potentialänderung durchläuft, also in einem elektrischen Feld beschleunigt wird:

$$W = -qU \qquad \left(\text{z.B. } = -\frac{1}{2}mv^2\right)$$

Äquipotentialflächen Punkte mit gleichem Potential bilden zusammen eine Äquipotentialfläche. Daher benötigt das Verschieben einer Ladung auf einer Äquipotentialfläche keine Arbeit. Gleichermaßen ist jedes Interal über einen Weg in einem $\vec{E}$-Feld, dessen Anfangs- und Endpunkt auf der gleichen Äquipotentialfläche liegen, gleich Null.

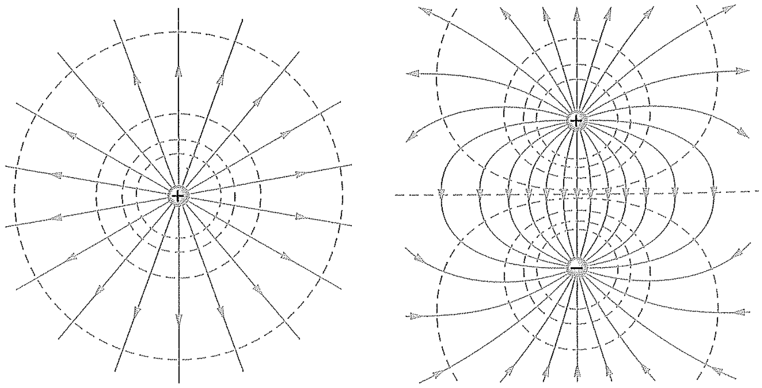


Abbildung 4: Äquipotentialflächen

Wichtig:

- Die Feldlinien des elektrischen Feldes stehen immer senkrecht auf den Äquipotentialflächen.
- Die Oberfläche eines Leiters ist immer eine Äquipotentialfläche.

Das Potential einer Punktladung Zur Berechnung des Potentials einer Punktladung verschiebt man eine Testladung aus dem Unendlichen - wo das Potential definitionsgemäß $= 0$ ist, in das Feld einer Punktladung an einem Punkt r (der umgekehrte Weg würde ein negatives Potential ergeben!):

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r} \overset{\vec{E}\parallel d\vec{r}}{=} -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r} \frac{1}{r'^2}dr'$$

Also insgesamt für das **Potential einer Punktladung:**

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

Das Potential ist eine skalare Größe und lässt sich einfach addieren. Für eine **allgemeine Ladungsverteilung** ergibt sich

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}dV}$$

Die Berechnung hierfür ist analog zum $\vec{E}$-Feld (siehe Beispiel dazu), nur kann hier der Satz von Gauß nicht angewendet werden.

1.5 Der elektrische Dipol

Zwei entgegengesetzt geladene Teilchen im Abstand d bilden einen **elektrischen Dipol**. Der Abstandsvektor $\vec{d}$ zeigt hier *entgegen* der Feldlinienrichtung, also von "-" nach "+".

Der elektrische Dipol ist ein wichtiges Modell zur Beschreibung und Untersuchung von Moleküle, die Dipolverhalten zeigen, z.B. H_2O:

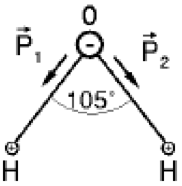
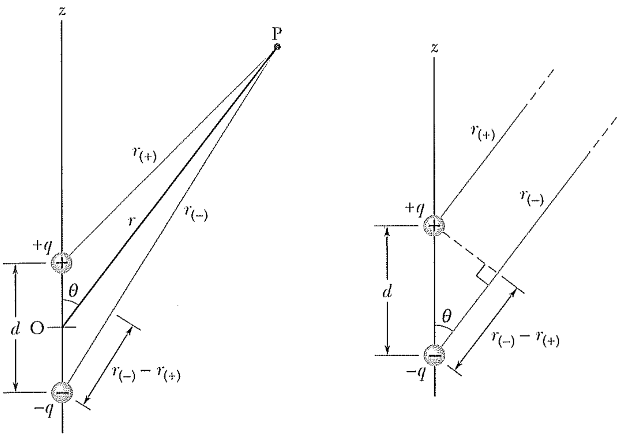


Abbildung 5: Das Wassermolekül als elektrischer Dipol.

Wir wollen das Fernfeld des elektrischen Dipols berechnen, also eine Näherung für große Abstände $r \gg d$ finden:



- Das Potential des Dipols ergibt sich mit $r_{(-)} - r_{(+)} = 2\Delta r = d\cos\theta$ und der Näherung $(\Delta r)^2 \approx 0$ zu:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r-\Delta r} - \frac{1}{r+\Delta r}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\Delta r}{r^2-(\Delta r)^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2}\end{aligned}$$

  Beachtenswert ist, dass das Dipolpotential mit $\frac{1}{r^2}$ abfällt, nicht wie bei einer Punktladung mit $\frac{1}{r}$.

- Einem Dipol wird das **Dipolmoment** $\vec{p}$ zugewiesen:

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{d}}$$

  Mit $\vec{p}\cdot\vec{r} = qdr\cos\theta$ schreibt sich dann das **Dipolpotential** als:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}}$$

- Das $\vec{E}$**-Feld des Dipols** ist dann:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}\vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{r}) + \vec{p}\cdot\vec{r}\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$$

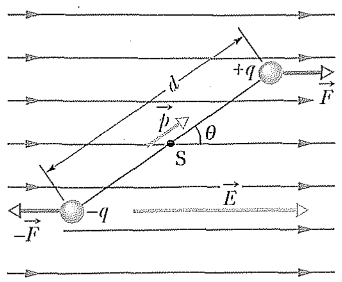
$\vec{E}$–**Feld eines elektrischen Dipols** : $\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3\,(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)}$

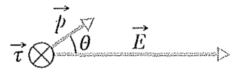
Das Dipolfeld fällt mit $\frac{1}{r^3}$ ab; das Feld einer Punktladung war $\frac{1}{r^2}$.

Das zeigt: Im Fernfeld kompensieren sich die Ladungen teilweise und das Feld und Potential des Dipols sind dadurch schwächer als das einer reinen Punktladung.

Entlang der z-Achse ist das Feld wesentlich stärker als entlang der x- oder y-Achse, wo sich die Wirkungen stärker aufheben.

Dipol im homogenen elektrischen Feld Wird ein Dipol in einem homogenen $\vec{E}$-Feld platziert (z.B. einem Plattenkondensator), so wirkt auf die beiden Punktladungen eine entgegengesetzt gerichtete, gleich große Kraft, die ein Drehmoment um den Schwerpunkt bewirkt:





Für den Fall des perfekten Dipols ergibt sich (mit Schwerpunkt bei $\frac{d}{2}$):

$$\begin{aligned}\left|\vec{M}\right| &= \frac{d}{2}\left|\vec{F}_\perp\right| + \frac{d}{2}\left|-\left(-\vec{F}_\perp\right)\right| \\ &= qd\left|\vec{E}\right|\cos(\theta-90^\circ) \\ &= |\vec{p}|\left|\vec{E}\right|\sin\theta \\ &= \left|\vec{p}\times\vec{E}\right|\end{aligned}$$

also ist das **Drehmoment auf einen Dipol im $\vec{E}$-Feld:**

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}}$$

Aufgrund dieser Fähigkeit, Arbeit verrichten zu lassen, weist man dem Dipol im $\vec{E}$-Feld ein Potential zu. Der Nullpunkt wird auf $\theta = 90^\circ$ gesetzt (Grund wird unten klar). Die Arbeit ist dann:

$$W = \int_\theta^{90^\circ} \vec{M}\cdot d\vec{\theta} = pE\int_\theta^{90^\circ} \sin\theta'\,d\theta' = pE\,\cos\theta = \left|\vec{p}\cdot\vec{E}\right|$$

Da $U_{pot} = -W$ folgt die **potentielle Energie des Dipols im $\vec{E}$-Feld:**

$$\boxed{U_{pot} = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

Diese Betrachtungen gelten auch für Dipole, deren Schwerpunkt nicht bei $\frac{d}{2}$ liegt.

1.6 Kapazität und Kondensatoren

Idee des Kondensators: Strom und damit Energie schneller zu liefern als eine Batterie, mithin also mehr Leistung: Kamerablitz, etc., oder einfach nur die Speicherung von Energie.

Ein Kondensator besteht immer aus zwei Platten, unabhängig von der Geometrie. Diese werden entgegengesetzt gleich aufgeladen, wenn eine Spannung angelegt wird. Die Ladung auf den Platten ist dann gegeben durch den linearen Zusammenhang der Spannung und einer Konstanten, in die die Geometrie des Kondensators einfließt; die **Kapazität** C**:**

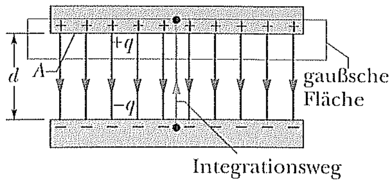
$$\boxed{q = CU} \qquad\qquad [C] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} \equiv F$$

Die Einheit der Kapazität ist **Farad** (1F ist ziemlich viel!)

Der Plattenkondensator

(Standard-Beispiel und bekanntester Vertreter.)

Wir stellen uns einen Plattenkondensator vor. Beide Platten tragen die Ladung q mit unterschiedlichem Vorzeichen. Unter Vernachlässigung von Randeffekten nehmen wir an, dass das Feld im Kondensator vollständig homogen ist und außerhalb verschwindet:



Zur Bestimmung der Kapazität nach $C = q/U$ bestimmen wir zunächst die Ladung über den Satz von Gauß: Wir legen eine Gauß'sche Fläche um die positiv geladene Platte und integrieren:

Das Feld geht nur durch die innere Fläche und ist dort parallel zu $d\vec{A}$, wir erhalten:

$$q = \epsilon_0 \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 E A$$

Zur Bestimmung der Spannung integrieren wir entlang der Feldlinien von der negativen zur positiven Platte - also entgegen der Feldrichtung (somit ergibt sich das Problem eines negativen Vorzeichens nicht):

$$U = \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s} = Ed$$

Somit folgt einfach für die **Kapazität eines Plattenkondensators**:

$$C = \frac{q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Wichtige **Eigenschaften** von Kondensatoren:

- Außerhalb eines idealen Kondensators ist kein $\vec{E}$-Feld, bei realen Kondensatoren spricht man von Streufeldern.
- Die Kapazität ist nur von der Geometrie und ϵ_0 abhängig.
- Die Platten eines Kondensators sind Äquipotentialflächen.
- Wird bei gleicher Spannung die Kapazität vergrößert oder verkeinert (z.B. beim Plattenkondensator: Abstand kleiner bzw. größer), so steigt oder sinkt auch die gespeicherte Ladung.
- Wird umgekehrt bei gleicher Ladung (Spannungsquelle abgetrennt) die Kapazität vergrößert oder verkleinert, so sinkt bzw. steigt die Spannung.

Reihen- und Parallelschaltung von Kondensatoren

- **Parallelschaltung:** In einer Parallelschaltung fällt über jedem Kondensator diesselbe Spannung ab, also ist die Summe der Kapazitäten gleich der Gesamtkapazität. Dementsprechend gilt:

  $$q_{ges} = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots = C_1 U + C_2 U + C_3 U + \cdots = U \left(\sum_i C_i \right)$$

  und somit

  Kapazität von parallel geschalteten Kondensatoren : $\boxed{C_{ges} = \frac{q_{ges}}{U} = \sum_i C_i}$

- **Reihenschaltung**: Bei einer Reihenschaltung müssen alle Kondensatoren diesselbe Ladung tragen, da Elektronen, die von einer Platte abfließen, zur Platte des nächsten Kondensators fließen. Die Gesamtspannung ist dann die Summe aller Spannungen:

  $$U_{ges} = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} + \cdots = q \left(\sum_i \frac{1}{C_i} \right)$$

  sodass für die Gesamtkapazität gilt:

  Kapazität von in Reihe geschalteten Kondensatoren : $\boxed{\frac{1}{C_{ges}} = \frac{U_{ges}}{q} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$

Energie des $\vec{E}$-Feldes im Kondensator Beim Aufladen eines Kondensators wird Arbeit aufgewandt, um die Ladungen voneinander zu trennen. Dies macht sich in der Spannung bemerkbar, die zugehörige potentielle Energie **ist im elektrischen Feld gespeichert.**

Zur Berechnung überlegt man sich die Arbeit, die benötigt wird, um einen Ladungsträger von einer Kondensatorplatte zur anderen zu bringen, nämlich

$$dW = U\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

Um die Gesamtarbeit zu erhalten, integriert man diesen Ausdruck bis zur Endladung Q und erhält die

Energie des $\vec{E}$-Feldes (im Kondensator): $\boxed{W = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2}$

Die **Energiedichte des $\vec{E}$-Feldes** ist einfach die Energie geteilt durch das Volumen des Kondensators (hier am Beispiel des Plattenkondensators - das Ergebnis ist aber allgemeingültig!)

$$w = \frac{\frac{1}{2} C U^2}{V} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2}{Ad} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Energiedichte des $\vec{E}$-Feldes: $\boxed{w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2}$

1.7 Materie im elektrischen Feld: Dielektrika

Materie besteht auf atomarer Ebene vereinfacht gesehen aus zwei unterschiedlich geladenen Bausteinen; Elektronen und Atomkernen. Nach außen neutral wirkende Materie besteht einfach aus gleichen Anteilen positiver und negativer Ladung. Im Unterschied zu Leitern sind bei **Dielektrika** Ladungen nicht frei beweglich, sondern an Atomkerne gebunden und können sich nur minimal innerhalb des Atoms bewegen.

Bringt man nun ein Dielektrikum in ein elektrisches Feld, zerrt das Feld an den positiven und negativen Ladungen, und das in entgegengesetzter Richtung. *Polare Dielektrika* mit intrinsischem Dipolmoment (z.B. Wasser) richten sich im Mittel an den Feldlinien aus, *unpolare Dielektrika* werden auseinandergezerrt, d.h. das äußere Feld verschiebt die Schwerpunkte von positiven und negativen Ladungen, wodurch ein Dipol entsteht, der an den Feldlinien ausgerichtet ist.

In beiden Fällen sind die Dipole *entgegen* der Feldlinien ausgerichtet, was bedeutet, dass die induzierten Dipol*momente* $\vec{p}_i$ in *diesselbe* Richtung zeigen wie das äußere Feld.

Innerhalb des Dielektrikums heben sich die Felder von benachbarten Dipolen auf, sodass für lineare Medien, wie wir sie hier betrachten, nur Oberflächenladungen übrig bleiben. Diese erzeugen ihrerseits ein elektrisches Feld $\vec{E}'$, das *entgegen* des externen Felds ausgerichtet ist.

Das Feld $\vec{E}$ innerhalb eines Dielektrikums ist also *kleiner* als das externe Feld $\vec{E}_0$.

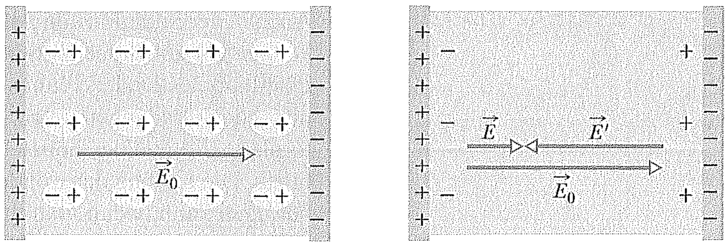


Abbildung 6: Dielektrikum im äußeren Feld.

Die Dichte aller Dipole im Dielektrikum ist die Dipoldichte oder **Polarisation** $\vec{P}$, die proportional zum Feld $\vec{E}$ ist, die Kopplungskonstante ist, neben ϵ_0, die **dielektrische Suszeptibilität** χ, eine materialspezifische Konstante:

$$\vec{P} = \frac{1}{V}\sum_i \vec{p}_i = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

Die genaue Berechnung des induzierten Feldes $\vec{E}'$ ist mathematisch und etwas tiefgründiger. Insgesamt ergibt sich für einfache Fälle, bei denen $\vec{E}$ parallel zur Oberfläche des Dielektrikums ist:

$\vec{E}$-Feld in einem Dielektrikum: $$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{\chi+1}\vec{E}_0 = \frac{1}{\epsilon_r}\vec{E}_0}$$

wobei ϵ_r die **relative Dielekrizitätskonstante** eines Dielektrikums ist. Sie ist ≥ 1, womit das Feld innerhalb des Dielektrikums tatsächlich kleiner als das externe Feld ist.

Man führt auch das **dielektrische Verschiebungsfeld** $\vec{D}$ ein:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

Dieses hat nur die *freien* Ladungen als Quelle, im Gegensatz zum elektrischen Feld, das auch die Polarisationsladungen, also die gebundenen Ladungen, berücksichtigt.

Kondensator mit Dielektrikum Eigentlich müsste man zur Berücksichtigung von Dielektrika die entstehende Oberflächenladung betrachten. Diese Betrachung erübrigt sich, wenn man die Ersetzung

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$$

vornimmt. Um es für den Plattenkondensator nochmal ausführlich zu zeigen:

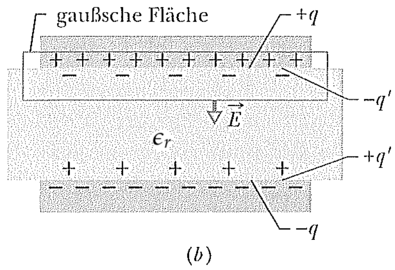


Abbildung 7: Plattenkondensator mit Dielektrikum.

Beim Kondensator ohne Dielektrikum umschliesst die Gauß'sche Fläche nur die Ladung q auf der oberen Platte, entsprechend erhält man mit dem Satz von Gauß

$$E_0 A = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Mit Dielektrikum umschliesst die Fläche die Ladung $q - q'$, das Feld ist aber E, also

$$EA = \frac{E_0}{\epsilon_r} A = \frac{q - q'}{\epsilon_0}$$

Vergleichen ergibt

$$q = q - q' = \frac{q}{\epsilon_r} \Rightarrow q = \epsilon_0 \epsilon_r EA$$

Die Spannung ist immer noch $U = Ed$ und es ergibt sich für die Kapazität:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r EA}{Ed} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

Also:

> Beim Einfügen eines Dielektrikums in einen Kondensator erhöht sich dessen Kapazität um ϵ_r.

Wichtig ist noch:

- Ein Kondensator mit mehreren Dielektrika in Reihe verhält sich wie eine Reihenschaltung von Kondensatoren mit jeweils einem der Dielektrika.
- Ein Kondensator mit mehreren parallelen Dielektrika verhält sich wie eine Parallelschaltung von Kondensatoren mit jeweils einem der Dielektrika.

Energiedichte des $\vec{E}$-Feldes im Dielektrikum Die Energiedichte ohne Dielektrikum war

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$$

Mit der Ersetzung $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$ ergibt sich

Energiedichte des $\vec{E}$-Feldes im Dielektrikum: $\boxed{w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}}$

Wobei $\vec{E}$ hier das Feld im Dielektrikum ist.