Lösungen: reale Körper und Hydrodynamik

Christoph Buhlheller, Rebecca Saive, David Franke
Florian Hrubesch, Wolfgang Simeth, Wolfhart Feldmeier

13. März 2009

1. In einem wasserdurchströmten Venturi-Rohr werde die Querschnittsfläche von A_1 auf A_2 verengt. Der statische Druck vor bzw. bei der Verengung sei p_1 bzw. p_2. Berechnen Sie aus der Differenz $\Delta p = p_2 - p_1$ die Rate $Q := \frac{dV}{dt}$, mit der das Wasser die Anordnung durchströmt!

   Lösung:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \cdot \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 + \Delta p$$

$$\Rightarrow v_1^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right) = \Delta p \cdot \frac{2}{\rho}$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left(1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right)}}$$

$$\Rightarrow Q = v_1 \cdot A_1 = A_1 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left(1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right)}}$$

2. Aus einem Wasserhahn strömt stationär und senkrecht nach unten Wasser aus! Der Hahn ist so weit geöffnet, dass ein geschlossener Strahl mit kreisrundem Querschnitt (Radius r_0) mit der Geschwindigkeit v_0 austritt.
(Hinweis: Die Geschwindigkeit quer zur Strömungsrichtung kann in dieser Aufgabe näherungsweise als konstant angenommen werden!)

   a) Berechnen Sie die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers in der Tiefe s unter der Öffnung!
   Betrachten Sie hierfür die Geschwindigkeitsdifferenz eienes Wasserteilchens der Masse Δm!

   b) Verifizieren Sie das Ergebnis aus a) unter Zuhilfenahme der Bernoulli-Gleichung!

   c) Bestimmen Sie den Radius des Strahles in der Tiefe s!

   d) Geben Sie eine Begründung dafür an, warum für größeres s nicht mehr von einem geschlossenen Strahl gesprochen werden kann! Die Rechnung macht somit nur für kleine s Sinn!

Lösung:

   a) Man betrachte ein Wasserteilchen der Masse Δm an der Ausflussöffnung! Dort hat es die Geschwindigkeit v_0.
   Hat dieses Wasserteilchen die Höhe h durchfallen, so hat es die Gschwindigkeit v(h).
   Wegen der Energieerhaltung gilt dann:

$$\frac{1}{2}\Delta m v_0^2 + \Delta m g h = \frac{1}{2}\Delta m v(h)^2$$
$$\Rightarrow v(h) = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

   b)

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v(h)^2$$
$$\Rightarrow v(h) = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

   Die Bernoulli-Gleichung ist im Prinzip die Erhaltung der Energie.

   c) Die Kontinuitätsgleichung besagt hier:

$$r_0^2 \pi v_0 = r(h)^2 \pi v(h)$$
$$\Rightarrow r(h) = \frac{r_0}{\left(1 + \frac{2g}{v_0^2} h\right)^{\frac{1}{4}}}$$

d) Mit zunehmendem h wird auch die Strömungsgeschwindigkeit größer! Die Oberflächenspannung des Wasser reicht irgendwann nicht mehr aus, den Strahl geschlossen zusammenzuhalten. Die kinetische Energie des Wassers ist nämlich so groß, dass sich Tröpfchen vom Strahl lösen.

3. Eine kugelförmige Blase in einer inkompressiblen Flüssigkeit (Dichte ρ) dehnt sich gleichmäßig in alle Richtungen aus. Ihr Volumen nimmt mit einer konstanten Rate $\frac{dV}{dt} =: Q$ zu.
Durch diese Expansion entsteht ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(r,t)$ außerhalb der Blase (r: Abstand vom Mittelpunkt der Blase).

   a) Bestimmen Sie mithilfe der Kontinuitätsgleichung das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}$!

   b) Bestimmen Sie den Druck $p(r,t)$ in der Flüßigkeit, wenn weit weg von der Blase der Druck p_0 vorherrscht!

Lösung:

   a) Man betrachte eine zur Blase konzentrische Kugel K_r mit dem Radius r.
   Da die Flüßigkeit inkompressibel ist, gilt überall $div(\vec{u}) = 0$. Die expandierende Blase drängt also Wasser aus der Kugel K_r heraus. Wegen der Volumenzunahme Q der Blase wird aus K_r Flüssigkeit mit derselben Rate Q verdrängt:

$$\int_{\partial K_r} \vec{u} \cdot d\vec{A} = Q$$

   Wegen der Symmetrie der Anordnung ist das Oberflächenintegral leicht zu bestimmen: (Desweiteren ist der Normalenvektor der Kugel parallel zu $\vec{u}$.)

$$\int_{\partial K_r} \vec{u} \cdot d\vec{A} = Q$$

$$\Rightarrow \int_{\partial K_r} \vec{u} \cdot d\vec{A} = Q$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 \cdot |\vec{u}| = Q$$

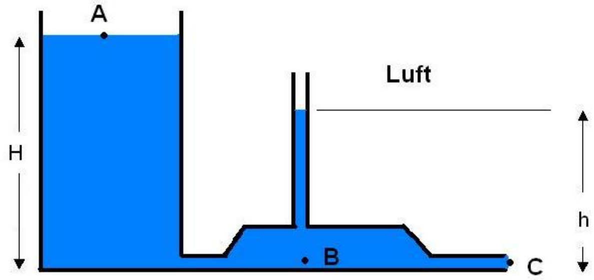
$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{e_r} \cdot \frac{Q}{4\pi r^2}$$

   b) Da in weiter Entfernung der Blase die Strömungsgeschwindigkeit in etwa 0 beträgt, folgt unter Verwendung der Bernoulli-Gleichung:

$$p(r,t) + \frac{1}{2}\rho u(r,t)^2 = p_0$$

$$\Rightarrow p(r,t) = p_0 - \frac{1}{2}\rho\frac{Q^2}{4^2\pi^2 r^4} = p_0 - \frac{Q^2\rho}{32\pi^2 r^4}$$

4. *Steigrohr*



Ein mit Wasser gefüllter Behälter sei mit einem Rohr (Querschnitt A_C) verbunden,

über das das Wasser abfließen kann (siehe Abbildung). Am Ende des Rohres tritt das Wasser an die Luft aus. An einer Verdickung des Rohres (Querschnitt A_B) befindet sich ein Steigrohr.

a) Wie groß ist die Stömungsgeschwindigkeit an der Ausflussöffnung (Punkt C)?

b) Bestimmen Sie die Strömungsgeschwindigkeit am Punkt B!

c) Geben Sie einen Ausdruck für die Wasserhöhe h im Steigrohr an!

Lösung:

a) Bernoulli-Ungleichung für die Punkte A und C:

$$p_L + \frac{1}{2}\rho\underbrace{v_A^2}_{=0} + g\rho H = p_L + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

$$\Rightarrow v_C = \sqrt{2gH}$$

b) Die Kontinuitätsgleichung liefert:

$$v_B A_B = v_C A_C$$

$$\Rightarrow v_B = \frac{A_C}{A_B}\sqrt{2gH}$$

c) Bernoulli-Ungleichung für die Punkte A und B:

$$p_L + \frac{1}{2}\rho\underbrace{v_A^2}_{=0} + g\rho H = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

$$\Rightarrow p_B = p_L + \rho g H\left(1 - \frac{A_3^2}{A_2^2}\right)$$

$$p_L + g\rho h = p_B$$
$$\Rightarrow h = H\left(1 - \frac{A_3^2}{A_2^2}\right)$$

5. Ein elastischer Quader mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge a, Höhe h) erfährt aufgrund einer parallel zur Deckfläche angreifenden Kraft eine Scherung um den Winkel α_0. Im Mittelpunkt der Deckfläche befindet sich die Masse m.
Nach plötzlichem Loslassen beginnt der Quader zu schwingen!
(Die Wirkung der Gewichtskraft der Masse m auf den Quader kann hier vernachlässigt werden!)

   a) Geben Sie einen Ausdruck für die rücktreibende Kraft auf die Masse m in Abhängigkeit von der Auslenkung x aus ihrer Ruhelage an!
   b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Auslenkung x der Masse m auf!
   c) Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung und die Periodendauer T!

   Lösung:

   a) Rücktreibende Kraft:
   $$F_r = \tau \cdot a^2 = G\alpha \cdot a^2$$
   Für kleine Winkel α gilt: $tan(\alpha) = \alpha = \frac{x}{L}$
   $$\Rightarrow F_r = G\frac{x}{L}a^2$$
   b) Kräftebillanz:
   $$F = m\ddot{x} = -F_r$$
   $$\Rightarrow m\ddot{x} = -G\frac{x}{L}a^2$$
   c) Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

   Eingesetzt in die Bewegungsgleichung:
   $$m \cdot \lambda^2 = -\frac{G}{L}a^2$$
   $$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm ia \cdot \sqrt{\frac{G}{mL}}$$
   $$\Rightarrow x_{1/2} = e^{\pm ia \cdot \sqrt{\frac{G}{mL}}}$$

Linearkombination liefert:

$$x(t) = C_1 \cdot cos\left(a \cdot \sqrt{\frac{G}{mL}}t\right) + C_2 \cdot sin\left(a \cdot \sqrt{\frac{G}{mL}}t\right)$$

Da zur Zeit t=0 die Auslenkung maximal ist und die Geschwindigkeit $\dot{x} = 0$, folgt:

$$C_1 = x_0 = \alpha_0 \cdot L$$

$$C_2 = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \alpha_0 \cdot L \cdot cos(a \cdot \sqrt{\frac{G}{mL}}t)$$

Für die Winkelgeschwindigkeit erhält man:

$$\omega = a \cdot \sqrt{\frac{G}{mL}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{a \cdot \sqrt{\frac{G}{mL}}}$$

6. In 5000m Meerestiefe befindet sich eine massive Alluminiumkugel, die über der Meeresoberfläche den Radius $R = 5m$ hat.
Bestimmen Sie den Radius der Kugel in dieser Tiefe!
$\mu_{Al} = 0.34$, $E_{Al} = 71 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$
Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $\frac{dV}{dr} = 4r^2\pi = 3\frac{V}{r}$
Lösung:

$$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{3}{E} \cdot (1 - 2\mu)$$

Auf die Kugel wirkt der hydrostatische Druck:

$$p = g\rho h$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K}$$

Da Δr nur sehr klein ist, gilt:

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} \approx \frac{dV}{dr} = 3\frac{V}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta r}{r}$$

$$\Rightarrow 3\frac{\Delta r}{r} = -\frac{p}{K}$$

$$\Rightarrow \Delta r = -\frac{rp}{3K} = -\frac{rg\rho h}{3K} = -\frac{rg\rho h}{3}\frac{3}{E} \cdot (1-2\mu) =$$
$$= -\frac{rg\rho h}{E} \cdot (1-2\mu) = 0.0011m$$

7. Ein Stahlseil ($E = 2 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$, $\rho = 7,7 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$) der Länge L= 9km wird einen Schacht hinuntergelassen, sodass es senkrecht hinunterhängt.
Berechnen Sie die Länge des hängenden Seiles L'!

Lösung

Zugspannung in der Höhe h über dem Seilende:

$$\sigma = \rho g h$$

Relative Dehnung in der Höhe h:

$$\epsilon(h) = \frac{1}{E}\sigma(h)$$

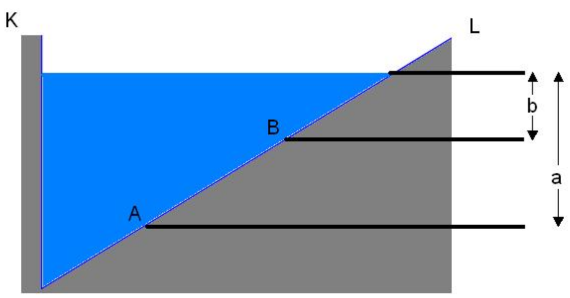
Gesamte Dehnung:

$$\Delta L = \int_0^L \epsilon(h)dh = \frac{1}{E}\int_0^L \sigma(h)dh =$$
$$= \frac{\rho g}{E}\int_0^L h dh = \frac{\rho g}{2E}L^2$$

Seillänge:

$$L' = L + \Delta L = L + \frac{\rho g}{E}\int_0^L h dh = L + \frac{\rho g}{2E}L^2 = 9,015km$$

8. Zwei Wände K und L stehen im Winkel $\alpha \leq 90°$ zueinander (Siehe Abbildung!). Dazwischen befindet sich eine Flüssigkeit der Dichte ρ.



Berechnen Sie die Kraft, die auf ein Rechteck mit den Eckpunkten A und B, das

in die Blattebene hinein die Länge L hat, wirkt.
Berechnen Sie außerdem den durchschnittlichen Druck p, der auf das Rechteck ausgeübt wird.

Lösung:
Für einen Punkt sei h sei der Abstand senkrecht zur Wasseroberfläche.

$$\Rightarrow p(h) = g\rho h$$

Kraft auf Rechteck:

$$F = \int dF = \int p(h)dA = L \cdot \int\limits_{h=b}^{a} p(h)\frac{1}{cos(\alpha)}dh =$$

$$= L\frac{1}{cos(\alpha)} \cdot \int\limits_{h=b}^{a} g\rho h dh = \frac{1}{2}g\rho L(a^2 - b^2)\frac{1}{cos(\alpha)}$$

Durchschnittlicher Druck:

$$p = \frac{\int pdA}{A} = L\int\limits_{h=b}^{a} g\rho h\frac{1}{cos(\alpha)}dh\frac{cos(\alpha)}{L(a-b)} = \frac{1}{2(a-b)} \cdot g\rho(a^2 - b^2) =$$

$$= \frac{a+b}{2}g\rho$$

9. Wie groß ist die Arbeit, die man aufwenden muss, um einen Vollwürfel aus Stahl mit der Kantenlänge a vom Boden eines Schwimmbades mit der Wassertiefe h anzuheben bis in eine Höhe, bei der die Unterseite gerade an der Wasseroberfläche ist?

   Lösung

   Die Arbeit berechnet sich in zwei Teilen. Zunächst benötigt man die Arbeit W_1, um den Würfel so hoch zu heben, bis die Deckfläche an der Wasseroberfläche ist. Beim zweiten Teil, wenn der Würfel nur noch teilweise im Wasser ist, ist die Arbeit W_2 erforderlich.

$$W_1 = \int Fds = \int\limits_{s=0}^{h-a} g(\rho_K - \rho_F)a^3 ds) = g(\rho_K - \rho_F)a^3(h-a)$$

$$W_2 = \int F(s)ds = g\int\limits_{s=0}^{a} [g(\rho_K - \rho_F)a^2(a-s) + \rho_K a^2 s]ds =$$

$$= gha^3[\rho_K - \rho_F(1 - \frac{a}{2h})]$$

$$W = W_1 + W_2 = g(\rho_K - \rho_F)a^3(h-a) + gha^3[\rho_K - \rho_F(1 - \frac{a}{2h})]$$

10. Eine gläserne Hohlkugel vom Radius R hat am Südpol eine kreiseförmige Ausflussöffnung mit Radius $r_0 < R$ und am Nordpol eine kleine verschließbare Luftöffnung. Die Kugel ist komplett mit Wasser gefüllt! Nach Öffnen der Luftzufuhr ($t = 0$) beginnt das Wasser auszuströmen. Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis die Kugel leer ist. (Die Strömung ist als laminar und reibungsfrei anzunehmen!)
Hinweis: Die Geschwindigkeit an der Wasseroberfläche darf gleich 0 gesetzt werden
Tipp: Überlegen Sie, was passiert, wenn der Wasserstand um dh sinkt, und welche Volumenmenge in dieser Zeit dt aus der Kugel strömt. Verwenden Sie dabei die Kontinuitätsgleichung!

Lösung:

Zu einer bestimmten Zeit t sei A ein Punkt an der Wasseroberfläche, B ein Punkt an der Ausflussöffnung.
Wegen der Luftzufuhr ist der statische Druck in A gleich dem Luftdruck.
Die Bernoulli-Gleichung liefert:

$$p_L + \frac{1}{2}\rho \underbrace{v_A^2}_{\approx 0} = p_L + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + g\rho\,(-h)$$

$$\Rightarrow v_A = \sqrt{2gh}$$

Nun betrachte man einen Zeitraum dt in dem sich der Wasserstand um $dh < 0$ ändert.
Wegen der Kontinuitätsgleichung gilt:

$$r^2\pi\,(-dh) = r_0^2\pi v dt$$

$$r^2 = 2Rh - h^2$$

$$\Rightarrow -(2Rh - h^2)dh = r_0^2\sqrt{2gh}dt$$

$$\Rightarrow -(2Rh^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{3}{2}})dh = r_0^2\sqrt{2g}dt$$

$$\Rightarrow -\int (2Rh^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{3}{2}})dh = \int r_0^2\sqrt{2g}dt$$

$$\Rightarrow -(2\frac{2}{3}Rh^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}) = r_0^2\sqrt{2g}t + C$$

$$h(t=0) = 2R$$
$$\Rightarrow C = -\frac{16}{15}R^2\sqrt{2R}$$

$$h(T) = 0$$
$$\Leftrightarrow r_0^2\sqrt{2g}T = -C$$
$$\Rightarrow T = \frac{16}{15}R^2\sqrt{2R}\cdot\frac{1}{r_0^2\sqrt{2g}} = \frac{16}{15}\frac{R^2}{r_0^2}\sqrt{\frac{R}{g}}$$

11. Ein mit einer Flüssigkeit (Dichte ρ_1, Viskosität η) gefülltes Gefäß steht auf einer elektrischen Waage. In diesem Zustand zeigt die Waage 0 an.
Nun wird zur Zeit t=0 eine kleine Kugel (Radius R, Masse m, Dichte ρ_2) in die Flüssigkeit geworfen.
Nehmen Sie an, die Kugel befinde sich zur Zeit t=0 an der Wasseroberfläche und bewege sich mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach unten.
Desweiteren gelte $\rho_1 < \rho_2$.

a) Bestimmen Sie die Kräfte, die auf die Kugel wirken!

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Kugel auf!

c) Wie groß ist die maximal erreichbare Geschwindigkeit?

d) Geben Sie den Betrag der Kraft an, die die Waage zur Zeit t anzeigt!

Lösung:

a) Auftriebskraft: $F_a = -g\rho_1\frac{4}{3}R^3\pi$
Gewichtskraft: $F_g = g\rho_2\frac{4}{3}R^3\pi$
Reibungskraft: $F_r = -6\pi\eta Rv$

b)
$$F = m\ddot{x} = m\dot{v} = -g\rho_1\frac{4}{3}R^3\pi + g\rho_2\frac{4}{3}R^3\pi - 6\pi\eta Rv$$
$$\Rightarrow m\dot{v} = \underbrace{\frac{4}{3}R^3\pi g(\rho_2-\rho_1)}_{=:F_0} - 6\pi\eta Rv$$
$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = F_0 - 6\pi\eta Rv$$
$$\Rightarrow m\frac{dv}{F_0 - 6\pi\eta Rv} = dt$$

$$\Rightarrow m\int\frac{dv}{F_0-6\pi\eta Rv}=\int dt$$

$$\Rightarrow m\cdot ln\left(F_0-6\pi\eta Rv\right)\cdot\frac{1}{-6\pi\eta R}=t+C$$

$$\Rightarrow F_0-6\pi\eta Rv=e^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t+C}$$

$$\Rightarrow v=\frac{F_0}{6\pi\eta R}-\frac{1}{6\pi\eta R}e^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t+C}$$

$$\Rightarrow v=\frac{F_0}{6\pi\eta R}-Ke^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t}$$

$$v_0:=v(t=0)$$

$$\Rightarrow v_0=\frac{F_0}{6\pi\eta R}-K$$

$$\Rightarrow K=\frac{F_0}{6\pi\eta R}-v_0$$

$$\Rightarrow v(t)=\frac{F_0}{6\pi\eta R}-\left(\frac{F_0}{6\pi\eta R}-v_0\right)e^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t}$$

c)

$$v_{max}=\lim_{t\to\infty}v(t)=\frac{F_0}{6\pi\eta R}$$

d) Die zusätzliche Kraft, die von der Waage registriert wird, kommt von den Wechselwirkungen der Kugel mit der Flüssigkeit.
Auf die Kugel wirkt nach die Kraft $F_1=-g\rho_1\frac{4}{3}R^3\pi-6\pi\eta Rv$. (Und die Gewichtskraft. Diese wird aber von der Erde hervorgerufen.)
Wegen Actio=Reactio wirkt auf die Flüssigkeit im Gefäß (und somit auf das Gefäß) die Kraft $-F_1$.

$$\Rightarrow F=6\pi\eta Rv+g\rho_1\frac{4}{3}R^3\pi=6\pi\eta R\cdot\frac{F_0}{6\pi\eta R}-6\pi\eta R\left(\frac{F_0}{6\pi\eta R}-v_0\right)e^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t}+g\rho_1\frac{4}{3}R^3\pi=$$

$$=\frac{4}{3}R^3\pi g(\rho_2-\rho_1)-6\pi\eta R\left(\frac{F_0}{6\pi\eta R}-v_0\right)e^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t}+g\rho_1\frac{4}{3}R^3\pi=$$

$$=\frac{4}{3}R^3\pi g\rho_2-6\pi\eta R\left(\frac{F_0}{6\pi\eta R}-v_0\right)e^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t}=$$

$$=\frac{4}{3}R^3\pi g\rho_2-\left(\frac{4}{3}R^3\pi g(\rho_2-\rho_1)-6\pi\eta Rv_0\right)e^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t}$$

12. Zwei Flüssigkeitsbehälter seien auf Höhe der Grundfläche mit einem zylindrischen Rohr vom Radius R verbunden.
Die Behälter seien bis zu einer Höhe h_1 bzw h_2 mit einem Newtonschon Fluid (Dichte ρ) der Viskosität η gefüllt.
Geben Sie mithilfe des Hagen-Poiseuille Gesetzes einen Zusammenhang zwischen h_1 und h_2 an, wenn am Anfang die Flüssigkeit mit der durschnittlichen Geschwindigkeit v überströmt.

Lösung:
Am Boden der Behälter gilt:

$$p_1 = g\rho h_1$$
$$p_2 = g\rho h_2$$

$$|\dot{V}| = |p_1 - p_2| \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta l}$$
$$\Rightarrow \pi R^2 v = |p_1 - p_2| \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta l}$$
$$\Rightarrow \pi R^2 v = g\rho |p_1 - p_2| \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta l}$$
$$\Rightarrow \pi R^2 v = g\rho |h_1 - h_2| \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta l}$$

13. Zwei Rohre mit den Radien r_1 und r_2 werden von Wasser mit den Geschwindigkeiten v_1 bzw. v_2 durchströmt. Sie laufen zu einem Rohr mit Radius R zusammen, in dem das Wasser mit der Geschwindigkeit v strömt.
Gehen Sie von einer stationären, reibungsfreien Strömung aus und berechnen Sie den Radius R in Abhängigkeit von den anderen Größen!

Lösung:

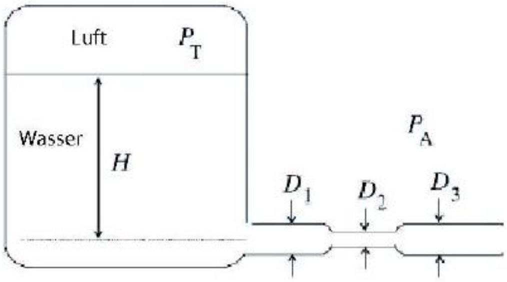
Der Satz von Gauß bzw. die Kontinuitätsgleichung liefert:

$$A_1 v_1 + A_2 v_2 = Av$$
$$\Rightarrow r_1^2 \pi v_1 + r_2^2 \pi v_2 = R^2 \pi v$$
$$\Rightarrow R^2 = \frac{r_1^2 v_1 + r_2^2 v_2}{v}$$
$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{r_1^2 v_1 + r_2^2 v_2}{v}}$$

14. In der gezeigten Anordnung herrscht der konstante Druck p_T im geschlossenen Teil des Gefäßes über der Flüssigkeit. Das Gefäß wird von Luft bei Normaldruck p_A umgeben. Die Schwerkraft wirke in vertikaler Richtung. Das Strömungsverhalten sei charakteristisch für eine ideale Flüssigkeit.

   a) Wie groß muss der Druck p_T mindestens sein, damit die Flüssigkeit ausläuft? (Gehen Sie von der einfachst möglichen Annahme über das Verhalten der Flüssigkeit am Ausfluss aus.)

   b) Wenn der Druck in einer strömenden Flüssigkeit unter den Dampfdruck p_D fällt, kommt es zur Bildung von Blasen. Diskutieren Sie unter Angabe der relevanten Gleichungen, wo und für welche Werte von $p_T > p_D$ es im gezeigten System beim Auslaufen zuerst zu einer Blasenbildung kommt. (Die Geschwindigkeit des Wassers im Behälter selbst sei vernachlässigbar.)



Lösung:

a) Die einfachste Annahme bedeutet, dass man sich keine Gedanken über rausschwappendes Wasser, reingezogene Blasen etc. machen soll, sondern das ganze so betrachten, als wäre das Ausflussrohr sauber mit einem beweglichen Kolben verschlossen, der mit dem Atmosphärendruck p_A dem Ausfließen entgegensteht. Dann kann man für den Druck auf der Höhe des Ausflussrohres einfach hinschreiben

$$p = p_T + \rho g H$$

und die Bedingung für Auslaufen ist $p > p_A \Rightarrow p_T > p_A - \rho H$

b) An einem allgemeinen Punkt im Ausflussrohr gilt die Bernoulli-Formel

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_T + g\rho H$$

(auf der rechten Seite taucht keine Geschwindigkeit auf, da die Geschwindigkeit des Wassers imBehälter vernachlässigt werden soll) also ist der Druck

$$p = p_T + g\rho H - \frac{1}{2}\rho v^2$$

also dort klein, wo die Geschwindigkeit groß ist. Zur Blasenbildung kommt es an der Stelle mit dem niedrigsten Druck, also an der Stelle mit der höchsten Geschwindigkeit. Nun gilt die Kontinuitätsgleichung

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3$$

also

$$D_1^2 v_1 = D_2^2 v_2 = D_3^2 v_3$$

Daher ist:

$$v_1 = v_3$$

$$v_2 = \frac{D_3^2}{D_2^2} v_3 < v_3$$

d.h. die Geschwindigkeit ist bei 2 am größten, der Druck dort am kleinsten, also entstehen dort die Blasen. (Die Zusatzbedingung $p_T > p_D$ soll verhindern, dass als Antwort kommt: Blasenbildung findet am Wasserspiegel statt, wenn $p_T < p_D$ ist.) Um den kritischen Wert für den treibenden Druck p_T zu bestimmen, berechnet man zuerst die Austrittsgeschwindigkeit v_3 mit Bernoulli:

$$p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 = p_T + g\rho H$$

p_3 ist gleich dem Außendruck p_A wegen der einfachst möglichen Annahme. Also

$$v_3 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_T \rho g H - p_A\right)}$$

Daraus bekommt man mit der Kontinuitätsgleichung v_2:

$$v_2 = \frac{D_3^2}{D_2^2} v_3$$

und daraus mit Bernoulli den Druck bei 2:

$$p_2 = p_T + g\rho H - \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Dieser soll nun kleiner gleich p_D sein. Alles eingesetzt führt diese Bedingung auf:

$$p_T + g\rho H - \frac{1}{2}\rho \frac{D_3^4}{D_2^4} \frac{2}{\rho}(p_T + \rho g H) \leq p_D$$

was durch korrektes Auflösen nach p_T ergibt:

$$p_T \geq \frac{D_3^4 p_A - D_2^4 p_D}{D_3^4 - D_2^4} - \rho g H$$