Aufgaben zu realen Körpern und Hydrodynamik

Christoph Buhlheller, Rebecca Saive, David Franke
Florian Hrubesch, Wolfgang Simeth, Wolfhart Feldmeier

13. März 2009

1. In einem wasserdurchströmten Venturi-Rohr werde die Querschnittsfläche von A_1 auf A_2 verengt. Der statische Druck vor bzw. bei der Verengung sei p_1 bzw. p_2. Berechnen Sie aus der Differenz $\Delta p = p_2 - p_1$ die Rate $Q := \frac{dV}{dt}$, mit der das Wasser die Anordnung durchströmt!

2. Aus einem Wasserhahn strömt stationär und senkrecht nach unten Wasser aus! Der Hahn ist so weit geöffnet, dass ein geschlossener Strahl mit kreisrundem Querschnitt (Radius r_0) mit der Geschwindigkeit v_0 austritt.
(Hinweis: Die Geschwindigkeit quer zur Strömungsrichtung kann in dieser Aufgabe näherungsweise als konstant angenommen werden!)

   a) Berechnen Sie die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers in der Tiefe s unter der Öffnung!
   Betrachten Sie hierfür die Geschwindigkeitsdifferenz eines Wasserteilchens der Masse Δm!

   b) Verifizieren Sie das Ergebnis aus a) unter Zuhilfenahme der Bernoulli-Gleichung!

   c) Bestimmen Sie den Radius des Strahles in der Tiefe s!

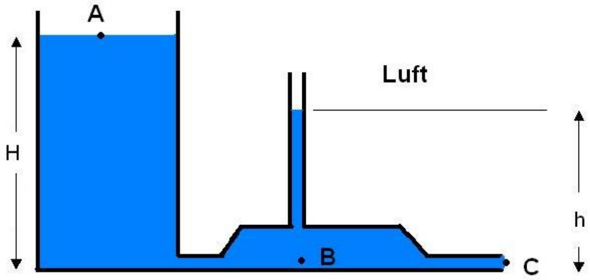
   d) Geben Sie eine Begründung dafür an, warum für größeres s nicht mehr von einem geschlossenen Strahl gesprochen werden kann! Die Rechnung macht somit nur für kleine s Sinn!

3. Eine kugelförmige Blase in einer inkompressiblen Flüssigkeit (Dichte ρ) dehnt sich gleichmäßig in alle Richtungen aus. Ihr Volumen nimmt mit einer konstanten Rate $\frac{dV}{dt} =: Q$ zu.
Durch diese Expansion entsteht ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(r, t)$ außerhalb der Blase (r: Abstand vom Mittelpunkt der Blase).

a) Bestimmen Sie mithilfe der Kontinuitätsgleichung das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}$!

b) Bestimmen Sie den Druck $p(r,t)$ in der Flüßigkeit, wenn weit weg von der Blase der Druck p_0 vorherrscht!

4. *Steigrohr*



Ein mit Wasser gefüllter Behälter sei mit einem Rohr (Querschnitt A_C) verbunden, über das das Wasser abfließen kann (siehe Abbildung). Am Ende des Rohres tritt das Wasser an die Luft aus. An einer Verdickung des Rohres (Querschnitt A_B) befindet sich ein Steigrohr.

a) Wie groß ist die Stömungsgeschwindigkeit an der Ausflussöffnung (Punkt C)?

b) Bestimmen Sie die Strömungsgeschwindigkeit am Punkt B!

c) Geben Sie einen Ausdruck für die Wasserhöhe h im Steigrohr an!

5. Ein elastischer Quader mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge a, Höhe h) erfährt aufgrund einer parallel zur Deckfläche angreifenden Kraft eine Scherung um den Winkel α_0. Im Mittelpunkt der Deckfläche befindet sich die Masse m.
Nach plötzlichem Loslassen beginnt der Quader zu schwingen!
(Die Wirkung der Gewichtskraft der Masse m auf den Quader kann hier vernachlässigt werden!)

a) Geben Sie einen Ausdruck für die rücktreibende Kraft auf die Masse m in Abhängigkeit von der Auslenkung x aus ihrer Ruhelage an!

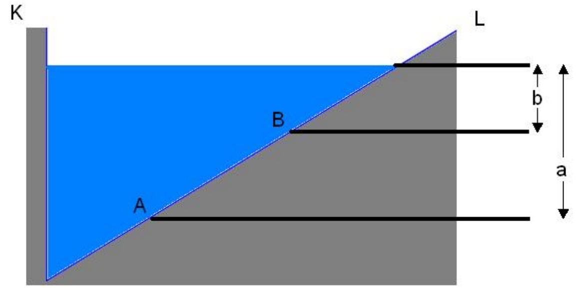
b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Auslenkung x der Masse m auf!

c) Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung und die Periodendauer T!

6. In 5000m Meerestiefe befindet sich eine massive Alluminiumkugel, die über der Meeresoberfläche den Radius $R = 5m$ hat.
Bestimmen Sie den Radius der Kugel in dieser Tiefe!
$\mu_{Al} = 0.34$, $E_{Al} = 71 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$
Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $\frac{dV}{dr} = 4r^2\pi = 3\frac{V}{r}$

7. Ein Stahlseil ($E = 2 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$, $\rho = 7,7 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$) der Länge L= 9km wird einen Schacht hinuntergelassen, sodass es senkrecht hinunterhängt.
   Berechnen Sie die Länge des hängenden Seiles L'!

8. Zwei Wände K und L stehen im Winkel $\alpha \leq 90°$ zueinander (Siehe Abbildung!). Dazwischen befindet sich eine Flüssigkeit der Dichte ρ.



   Berechnen Sie die Kraft, die auf ein Rechteck mit den Eckpunkten A und B, das in die Blattebene hinein die Länge L hat, wirkt.
   Berechnen Sie außerdem den durchschnittlichen Druck p, der auf das Rechteck ausgeübt wird.

9. Wie groß ist die Arbeit, die man aufwenden muss, um einen Vollwürfel aus Stahl mit der Kantenlänge a vom Boden eines Schwimmbades mit der Wassertiefe h anzuheben bis in eine Höhe, bei der die Unterseite gerade an der Wasseroberfläche ist?

10. Eine gläserne Hohlkugel vom Radius R hat am Südpol eine kreiseförmige Ausflussöffnung mit Radius $r < R$ und am Nordpol eine kleine verschließbare Luftöffnung. Die Kugel ist komplett mit Wasser gefüllt! Nach Öffnen der Luftzufuhr ($t = 0$) beginnt das Wasser auszuströmen. Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis die Kugel leer ist. (Die Strömung ist als laminar und reibungsfrei anzunehmen!)
    Hinweis: Die Geschwindigkeit an der Wasseroberfläche darf gleich 0 gesetzt werden
    Tipp: Überlegen Sie, was passiert, wenn der Wasserstand um dh sinkt, und welche Volumenmenge in dieser Zeit dt aus der Kugel strömt. Verwenden Sie dabei die Kontinuitätsgleichung!

11. Ein mit einer Flüssigkeit (Dichte ρ_1, Viskosität η) gefülltes Gefäß steht auf einer elektrischen Waage. In diesem Zustand zeigt die Waage 0 an.
    Nun wird zur Zeit t=0 eine kleine Kugel (Radius R, Masse m, Dichte ρ_2) in die Flüssigkeit geworfen.
    Nehmen Sie an, die Kugel befinde sich zur Zeit t=0 an der Wasseroberfläche und bewege sich mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach unten.
    Desweiteren gelte $\rho_1 < \rho_2$.

a) Bestimmen Sie die Kräfte, die auf die Kugel wirken!

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Kugel auf!

c) Wie groß ist die maximal erreichbare Geschwindigkeit?

d) Geben Sie den Betrag der Kraft an, die die Waage zur Zeit t anzeigt!

12. Zwei Flüssigkeitsbehälter sind auf Höhe der Grundfläche mit einem zylindrischen Rohr vom Radius R verbunden.
Die Behälter sind bis zu einer Höhe h_1 bzw h_2 mit einem Newtonschon Fluid (Dichte ρ) der Viskosität η gefüllt.
Geben Sie mithilfe des Hagen-Poiseuille Gesetzes einen Zusammenhang zwischen h_1 und h_2 an, wenn am Anfang die Flüssigkeit mit der durschnittlichen Geschwindigkeit v überströmt.

13. Zwei Rohre mit den Radien r_1 und r_2 werden von Wasser mit den Geschwindigkeiten v_1 bzw. v_2 durchströmt. Sie laufen zu einem Rohr mit Radius R zusammen, in dem das Wasser mit der Geschwindigkeit v strömt.
Gehen Sie von einer stationären, reibungsfreien Strömung aus und berechnen Sie den Radius R in Abhängigkeit von den anderen Größen!

14. In der gezeigten Anordnung herrscht der konstante Druck p_T im geschlossenen Teil des Gefäßes über der Flüssigkeit. Das Gefäß wird von Luft bei Normaldruck p_A umgeben. Die Schwerkraft wirke in vertikaler Richtung. Das Strömungsverhalten sei charakteristisch für eine ideale Flüssigkeit.

    a) Wie groß muss der Druck p_T mindestens sein, damit die Flüssigkeit ausläuft? (Gehen Sie von der einfachst möglichen Annahme über das Verhalten der Flüssigkeit am Ausfluss aus.)

    b) Wenn der Druck in einer strömenden Flüssigkeit unter den Dampfdruck p_D fällt, kommt es zur Bildung von Blasen. Diskutieren Sie unter Angabe der relevanten Gleichungen, wo und für welche Werte von $p_T > p_D$ es im gezeigten System beim Auslaufen zuerst zu einer Blasenbildung kommt. (Die Geschwindigkeit des Wassers im Behälter selbst sei vernachlässigbar.)