Vorlesung zu realen Körpern und Hydrodynamik

Christoph Buhlheller, Rebecca Saive, David Franke
Florian Hrubesch, Wolfgang Simeth, Wolfhart Feldmeier

13. März 2009

Inhaltsverzeichnis

Am Anfang identifizierten wir ein physikalisches Objekt als mathematischen Punkt mit der Masse m, dessen Verhalten oft durch einfache Gesetze beschrieben werden konnte. Für einfache kinematische Probleme, bei denen die Ausdehnung der Körper nicht weiter relevant war, erzielten wir durchaus gute Ergebnisse. Relativ bald stellten wir jedoch fest, dass es nicht ausreicht, einen Körper als Punkt zu beschreiben, weil man dadurch Effekte wie die Rotation nicht berücksichtigen kann. Wir gingen folglich zu kontinuierlichen Masseverteilungen über, um derartige Probleme in den Griff zu bekommen, und beschrieben einen physikalischen Gegenstand als starren Körper.
Für relativ feste Materialien mag diese Art von Beschreibung ausreichend sein. Betrachtet man jedoch weichere Körper unter extremeren Druckbedingungen, so sind die Ergebnisse nicht zufriedenstellend. Vielmehr ist es eine Idealvorstellung, davon auszugehen, Gegenstände verhielten sich in der Wirklichkeit wie starre Körper. Der *reale Körper* hat keine fortbleibend gleiche Struktur, sondern lässt sich unter Krafteinwirkung deformieren oder ist gar flüssig.

1 Harte Reale Körper

Wir wollen also versuchen, das Verhalten dieser realen Körper zu beschreiben.
Zunächst werden verschiedene Arten der Deformation eines festen realen Körpers durch Krafteinwirkung untersucht.
Nimmt ein deformierter Körper nach Beendigung dieser Einwirkung wieder seine Anfangsgestalt an, so spricht man von einem *elastischen Körper*. Bleiben dagegen Änderungen in der Form zurück, so nennt man ihn *plastischen Körper*
Ob sich ein realer Körper in einer bestimmten Situation wie ein plastischer oder wie ein elastischer verhält, ist abhängig von der Größe der einwirkenden Kraft, von der Art der Krafteinwirkung und von der atomaren Struktur des Materials.
So kann bei ein und demselben Körper aus einer Kraft F ein kleiner Druck mit einer elastischen Stauchung hervorgehen, jedoch genauso ein großer Druck, der die Oberfläche des Körpers beschädigt.

1.1 Hookesches Gesetz

Zuerst betrachten wir den Fall, dass eine Kraft senkrecht zur Oberfläche eines elastischen Körpers angreift.
Wirkt auf einen elastischen Quader der Länge L mit dem Querschnitt q eine (kleine) Kraft F in Richtung der Normale der Grundfläche, so zeigen Experimente bei genügend kleiner Längenänderung ΔL einen linearen Zusammenhang:

$$F = E \cdot q \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

(Hookesches Gesetz)

Die materialspezifische Proportionalitätskonstante heißt *Elastizitätsmodul*.

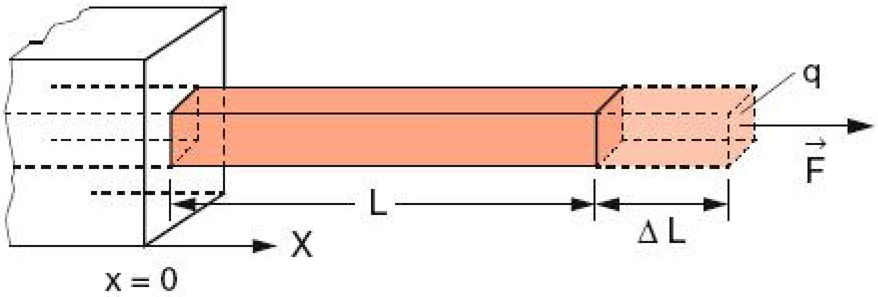

Abbildung 1: Dehnung eines Stabes

Zur Veranschaulichung des Elastizitätsmoduls:
Es gibt an, wie schwer es ist, den Gegenstand zu stauchen oder zu dehnen. Bei einem Material mit größerem E benötigt man eine größere Kraft, den Gegenstand um eine Länge ΔL zu dehnen, als bei einem Material mit kleinerem E!
Man führt nun den Begriff der Zugspannung

$$\sigma := \frac{F}{A}$$

und der relativen Dehnung

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

ein.

Dann erhält das Hookesche Gesetz die einfache Form:

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

1.2 Querkontraktion

Wirkt auf die Grundfläche des eben betrachteten Quaders eine Zugspannung, so verändert sich der Körper in natürlicher Weise nicht nur in seiner Längsrichtung, sondern auch quer dazu. Wird der Stab in Längsrichtung zusammengedrückt, so wird er in Querrichtung breiter. Dagegen erfährt er eine Querkontraktion, wenn er in Längsrichtung

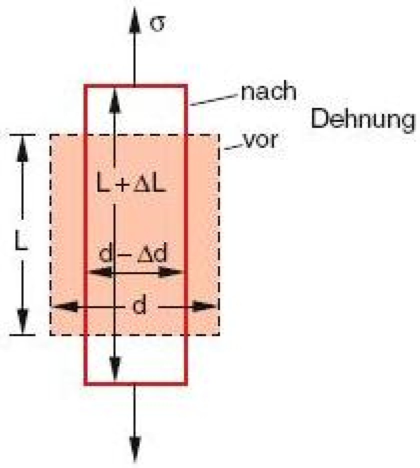

Abbildung 2: Querkontraktion

gestaucht wird.

Nun betrachtet man den Quader von vorher, wenn die Länge um ΔL und die Ausbreitungen in Querrichtung um Δd verändert werden.
Wir wissen noch nicht wie ΔL und Δd zusammenhängen. Jedoch können wir in Abhängigkeit von diesen beiden Größen die Volumenänderung des Quaders angeben:

$$\Delta V = (d + \Delta d)^2 \cdot (L + \Delta L) - d^2 L =$$
$$= d^2 \Delta L + 2Ld\Delta d + \underbrace{\left(L\Delta d^2 + 2d\Delta d\Delta L + \Delta L\Delta d^2\right)}_{\approx 0}$$

Da nur sehr kleine Längenänderungen betrachtet werden, sind im obigen Ausdruck die führenden Terme die, in denen ΔL und Δd linear aufreten. Das Produkt dieser beiden Änderungen oder das Quadrat ist jedoch verschwindend klein.

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta d}{d}$$

Nun interressiert uns aber der Zusammenhang zwischen der Längenänderung in Längs- und Querrichtung. Experimente zeigen, dass bei kleinen Änderungen bei vielen Stoffen das Verhältnis

$$\mu := -\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta L}{L}}$$

konstant bleibt. Dieses materialspezifische Verhältnis heißt *Querkontraktionszahl* oder *Poissonzahl* und ist stets positiv. Mit dieser Zahl haben wir also den gewünschten Zusammenhang zwischen den Dehnungen in Quer- und Längsrichtung.

Mit dem Hookeschen Gesetz erhalten wir außerdem:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma}{E}(1-2\mu)$$

1.3 Krafteinwirkung von allen Richtungen

In vielen Situation wirkt auf einen Körper von allen Richtungen eine Kraft senkrecht zur Oberfläche ein. Die Ursache dieser Kraft ist der Druck des umgebenden Mediums. Herrscht in der Umgebung der Druck p, so lässt sich die Änderung des Volumens V eines realen Körpers (Elastizitätsmodul E, Poissonzahl μ) in folgender Weise beschreiben:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{3p}{E} \cdot (1-2\mu)$$

Diesen Zusammenhang erhält man, wenn man die Ergebnisse der letzten beiden Abschnitte auf alle Raumrichtungen sukzessive anwendet.
Definiert man weiter das Kompressionsmodul

$$\frac{1}{K} = \frac{3}{E} \cdot (1-2\mu)$$

und die Kompressibilität

$$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{3}{E} \cdot (1-2\mu)$$

so vereinfacht sich die obige Formel zu:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K}p = \kappa p$$

1.4 Scherung

Eine andere grundlegende Art der Deformation ist die einer Scherung. Sie tritt auf, wenn die Kraft tangential an der Oberfläche des Körpers angreift.
Zur weiteren Beschreibung ist die Schub- bzw. Scherspannung:

$$\tau := \frac{F}{A}$$

Im speziellen Fall des Quaders bedeutet dies:

$$\tau = \frac{F}{d^2}$$

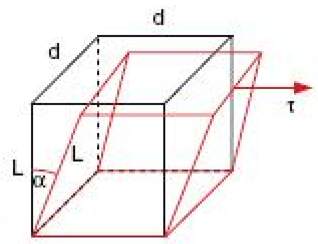

Abbildung 3: Scherung eines Quaders

Experimentell stellt man fest, dass bei kleinem Scherwinkel eine Proportionalität erfüllt ist:

$$\tau = G \cdot \alpha$$

G heißt *Schubmodul*, *Schermodul* oder *Torsionsmodul*.

Bei konkreten Problemen und Aufgaben sind die folgenden Beziehungen manchmal hilfreich, die für isotrope Körper gültig sind:

$$\frac{E}{2G} = 1 + \mu$$
$$\frac{E}{3K} = 1 - 2\mu$$
$$\frac{2G}{3K} = \frac{1 - 2\mu}{1 + \mu}$$

Man rufe kurz in Erinnerung, dass die obigen Gesetze lineare Näherungen sind, die nur für kleine Veränderungen ihre Gültigkeit haben. Bei größeren Dehnungen/Scherungen verlaufen die Vorgänge nichtlinear. Bei ganz großen Einwirkungen ist die Deformation nicht einmal mehr elastisch. Die Kraft verursacht dann eine bleibende Veränderung.

2 Flüssigkeiten

Eine spezielle Art von realen Körpern sind die Flüßigkeiten. Um die Form einer idealen Flüssigkeit zu verändern, benötigt man keinerlei Kräfte. Dies drückt sich beispielsweise dadurch aus, dass das Schubmodul G einer idealen Flüssigkeit 0 ist. Deshalb verschwinden im statischen Fall die tangentialen Kräfte auf eine ideale Flüssigkeit. Die Kräfte stehen dann senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche.

2.1 Hydrostatik

2.1.1 Satischer Druck in einer Flüssigkeit

Wirkt auf die Flüssigkeitsoberfläche A von außen die Kraft F, so definiert man den Druck:

$$p := \frac{F}{S}$$

Bei idealen Flüssigkeiten ist der Druck vollkommen isotrop, wenn man das Eigengewicht der Flüssigkeit vernachlässigt.
Eine bekannte Anwendung davon ist die Hydraulische Presse.

2.1.2 Hydrostatischer Druck

Nun muss man bedenken, dass die Flüssigkeit an sich auch der Erdbeschleunigung unterliegt.
Der Boden eines quaderförmigen Behälters, der bis zur Höhe h mit einer Flüssigkeit gefüllt ist, spürt die Gewichtskraft der Flüssigkeitssäule, die auf ihm lastet.

Weitere Überlegungen zeigen, dass durch diese Kraft ein Druck entsteht - der *hydrostatische Druck*.

Man berechnet genauer, dass in einer Flüssigkeit der Dichte ρ in der Entfernung h unter der Oberfläche der Druck $p = g \cdot \rho \cdot h$ herrscht.

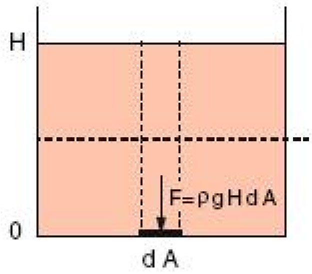

Abbildung 4: Auf dem Boden lastet das Gewicht der Säule

Erstaunlich an diesem Resultat ist, dass der Druck lediglich von der Höhe der Wassersäule abhängt.

So ist die Kraft, die auf ein Gefäß mit der Grundfläche A wirkt lediglich vom Wasserstand H abhängig.
Es ergibt sich:

$$F = A \cdot p = A \cdot g\rho H$$

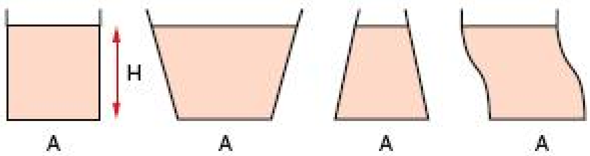

Abbildung 5: Hydrostatisches Paradoxon

Dieser Umstand wird oft als **hydrostatisches Paradoxon** bezeichnet, da er einige eigenartige Begebenheiten mit sich bringt.

2.1.3 Auftrieb

Ein Körper der Dichte ρ_K, der sich in einer Flüssigkeit der Dichte ρ_F befindet, spürt eine Kraft, die entgegengesetzt zur Gewichtskraft gerichtet ist. Folglich kompensiert diese Kraft die Gewichtskraft.
Sie wird *Auftriebskraft* genannt und ist so groß wie das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit. (**Archimedisches Prinzip**)

Befindet sich ein Körper vom Volumen V mit dem Volumen V_0 in der Flüssigkeit und dessen Rest $V - V_0$ an der Luft, so erfährt er die Kraft $\rho_K \cdot V \cdot g - \rho_F \cdot V_0 \cdot g$ nach unten.

Notwendige Folgerungen für das Verhalten von festen Körpern in Flüssigkeiten:

$\rho_K > \rho_F \Rightarrow$ Der Körper geht unter.
$\rho_K = \rho_F \Rightarrow$ Der Körper schwebt in der Flüssigkeit.
$\rho_K < \rho_F \Rightarrow$ Der Körper schwimmt an der Flüssigkeitsroberfläche.

2.2 Hydrodynamik

2.2.1 Begriffsbildung

Im Zusammenhang mit Flüssigkeiten ist man besonders an deren Strömungsverhalten interessiert.
Dazu müssen erst einige Begriffe erläutert werden, die zum Verständnis erforderlich sind.

Die Bewegung einer Flüssigkeit ist dann bekannt, wenn man die Geschwindigkeitsverteilung $\vec{u}(\vec{r}, t)$ kennt. Hängt $\vec{u}(\vec{r}, t)$ nicht von t ab, also $\frac{\partial \vec{u}(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$, so spricht man von einer *stationären Strömung*. Anschaulich bedeutet dies, dass die Strömungsgeschwindigkeit an jeder Stelle zeitlich konstant ist. Flüssigkeiten, bei denen keine Reibungskräfte auftreten, heißen ideal, sonst viskos oder zäh. Strömungen, bei denen sich die Stromfäden nicht kreuzen, heißen laminar.

2.2.2 Kontinuitätsgleichung

Hat man eine beliebige Fläche A im Raum vorgegeben, so kann man auf folgende Weise den *Volumenstrom* durch diese Fläche berechnen (d.h. das Volumen an Flüssigkeit, das pro Zeit durch diese Fläche fließt):

$$Q = \frac{dV}{dt} = \int_A \vec{u}(\vec{r}, t) d\vec{F} = A \cdot v$$

Dabei ist v der Betrag der durchschnittlichen Stömungsgeschwindigkeit durch diese Fläche. Das Produkt $\vec{j} := \vec{u}\rho$ wird Massenstromdichte genannt und kann anschaulich als die Masse interpretiert werden, die in eine Richtung fließt.

$$\int_S \vec{j} d\vec{A}$$

ist die Masse, die pro Zeiteinheit durch die Fläche S fließt.
Mit dem Gaußschen Integralsatz lässt sich nun die allgemeine Form der Kontinuitätsgleichung herleiten, die nichts anderes als die Erhaltung der Masse besagt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{u}) = 0$$

Bei inkompressiblen Flüssigkeiten vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$div(\vec{u}) = 0$$

Anschaulich bedeutet dies, dass in jedes Volumen zu jeder Zeit t insgesamt genausoviel Flüssigkeit hineinfließt, wie herauskommt.

Dieses Gesetz wird in der Praxis ständig verwendet und lässt sich beispielsweise auf die Strömung von Wasser (nahezu inkompressibel!!) in Rohren anwenden:
Ändert sich der Querschnitt eines Rohres von A_1 auf A_2, so gilt für die *durchschnittlichen* Geschwindigkeiten an diesen Stellen:

$$\text{Volumenstrom durch } A_1 = \text{Volumenstrom durch } A_2$$

$$\Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$

(Kontinuitätsgleichung füt ein durchströmtes Rohr)

2.2.3 Bernoulli-Gleichung

Um die Strömungen beschreiben zu können, müssen wir den Einfluss der Schwerkraft mit ins Spiel bringen.
Dies geschieht in der Herleitung der Bernoulli-Gleichung. Sie ist der Energieerhaltungssatz bei Strömungen, die reibungsfrei, stationär und inkompressibel sind.
Sie besagt, dass für beliebige Punkte A und B entlang einer Stromlinie gilt:

$$p_A + \frac{\rho}{2} v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A = p_B + \frac{\rho}{2} v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B$$

Dabei werden h_A und h_B bezüglich eines gemeinsamen Bezugspunkt gemessen, wobei die positive Richtung nach oben geht.

Achtung: Dies kann eine mögliche Fehlerquelle sein, da man leicht versucht sein könnte, h_1 und h_2 wie beim hydrostatischen Druck von der Wasseroberfläche weg nach unten zu messen!

p_A bzw. p_B ist der statische Druck an der entsprechenden Stelle und v_1 bzw. v_2 die dortige Strömungsgeschwindigkeit.

2.2.4 Strömung von zähen Flüssigkeiten

Bei der Strömung zäher Flüssigkeiten bildet sich aufgrund der Reibungskräfte ein Geschwindigkeitsprofil. Desweiteren kommt es zusammen mit den Reibungsverlusten zu Druckverlusten. Verantwortlich hierfür ist die innere Reibung der Flüssigkeit. Diesist die Reibung der Flüssigkeit mit sich selbst.
Ein bekanntes Beispiel ist das *Hagen-Poiseuille*-Gesetz für stationäre, laminare Strömungen in einem Rohr vom Radius R der Länge L.
Man erhält nämlich durch etwas Rechenaufwand, dass in einem derartigen zylindrischen Rohr der Druckabfall mit dem Volumenstrom in folgender Weise zusammenhängt:

$$\dot{V} = \frac{\pi \Delta p}{8\eta L} R^4$$

2.2.5 Bewegung in zähen Flüssigkeiten

Bewegt sich ein Gegenstand mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einer zähen Flüssigkeit, so wird er durch eine Reibungskraft abgebremst. Deshalb kann der Gegenstand in einem zähen Fluid durch die Erdbeschleunigung nicht auf beliebig große klassische Geschwindigkeiten beschleunigt werden, sondern erreicht irgendwann eine Maximalgeschwindigkeit.
Für kleine Kugeln mit nicht zu großem Radius R stellt man im Experiment für diese Reibungskraft fest:

$$F_R = -6\pi\eta R \cdot \vec{v}$$

(Stokessches Gesetz)