Musterlösung zu den Aufgaben Gase und Wellen

Christoph Buhlheller, Rebecca Saive, David Franke
Florian Hrubesch, Wolfgang Simeth, Wolfhart Feldmeier

9. März 2009

1.

$$\rho_{H_2O} = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$$

a)

$$G = A \cdot \rho \cdot g \cdot h$$

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

$$\Rightarrow p(h = 5\mathrm{m}) = \underline{49,05 \cdot 10^3 Pa}$$

b)

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} \Rightarrow -\kappa \mathrm{d}p = \frac{1}{V}\mathrm{d}V = \frac{1}{l}\mathrm{d}l$$

wobei l die Strecke im Zylinder ist, die mit Luft gefüllt ist.

$$\Rightarrow ln(l) = -\kappa p + C \Rightarrow l(p) = l_0 \cdot \mathrm{e}^{-\kappa p}$$

$$l(49,95 \cdot 10^3\mathrm{Pa}) = \underline{30,6\mathrm{cm}}$$

c) s sei die Strecke im Zylinder, die dieser schon mit Wasser gefüllt ist (also $s = l_0 - l(h)$), h die Tauchtiefe.

$$\Delta s = 1\mathrm{mm}, \quad h_1 - h_2 = 1\mathrm{m}$$

$$l(h) = l_0 \cdot \mathrm{e}^{-\kappa\rho g h}$$

$$s(h) = l_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa\rho g h}\right)$$

$$\Delta s = s(h_1) - s(h_2) = l_0\left(\mathrm{e}^{-\kappa\rho g h_2} - \mathrm{e}^{-\kappa\rho g h_1}\right)$$

$$\frac{\Delta s}{l_0}\mathrm{e}^{\kappa\rho g h_1} = -1 + \mathrm{e}^{\kappa\rho g(h_1 - h2)}$$

$$h_1 = \frac{1}{\kappa\rho g}\ln\left(\frac{l_0\left[\mathrm{e}^{\kappa\rho g(h_1-h_2)} - 1\right]}{\Delta s}\right) = \underline{40,2\mathrm{m}}$$

2. a)

$$\rho(h) = \rho_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0}{p_0}gh} \Rightarrow \rho(600\mathrm{m} = 1,198\mathrm{kgm}^{-3})$$

b)

Auftriebskraft = Gewicht der verdrängten Luft

$$G_{\text{Heißluftballon}}(0\mathrm{m}) = \rho_0 V = \underline{3,88\mathrm{kN}}$$
$$G_{\text{Heißluftballon}}(600\mathrm{m}) = \rho(600\mathrm{m}) \cdot V = \underline{3,59\mathrm{kN}}$$

c)

$$m_{max} = \frac{G(600\mathrm{m})}{g} = \underline{366\mathrm{kg}}$$

d) i.

$$F^{\text{Auf}}_{\text{Heliumballon}}(0\mathrm{m}) = \rho_{0,\text{Luft}} \cdot V = \underline{3,88\mathrm{kN}}$$

$$V_{\text{Heliumballon}}(600\mathrm{m}) = \frac{\rho_{0,\text{He}} \cdot V_0}{\rho_{\text{He}}(600\mathrm{m})} = \mathrm{e}^{\rho_{0,\text{Luft}}/p_0 \cdot g \cdot 600\mathrm{m}} \cdot V_0 = 3237\mathrm{m}^3$$

$$F^{\text{Auf}}_{\text{Heliumballon}}(600\mathrm{m}) = V_{\text{Heliumballon}}(600\mathrm{m}) \cdot \rho_{\text{Luft}}(600\mathrm{m}) = \underline{3,88\mathrm{kN}}$$

ii.

$$m_{max} = \frac{F^{\text{Auf}}_{\text{Heliumballon}}(600\mathrm{m})}{g} = \underline{395\mathrm{kg}}$$

3. Zur Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit aus der Maxwellverteilung siehe Vorlesung!

$$m = 2 \cdot 14\mathrm{u} = 4,65 \cdot 10^{-26}\mathrm{kg}$$

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi \cdot m}} = \underline{476\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

4.

$$\frac{N(x)}{N_0} = \mathrm{e}^{-n\sigma x} = \mathrm{e}^{-x/\bar{l}}$$

a)

$$\mathrm{e}^{-\bar{l}/\bar{l}} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} = \underline{0,368}$$

b)

$$\mathrm{e}^{-2} = \underline{0,135}$$

5. Hier gehts natürlich um den Dopplereffekt. Es gilt: $\nu = \frac{1}{T}$. Wir bestimmen also zuerst die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden eintreffenden Wellenbergen.

   a) i. (Rettungswagen bewegt sich auf den Fußgänger zu): Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Rettungswagen (RW) bei $x = 0$ und emittiere einen Wellenberg (I). Nach einer Periodendauer T befindet sich (I) an der Stelle $v_S \cdot T$ und (RW) an der Stelle $v_{RW} \cdot T$.
   Der Fußgänger befinde sich zum Zeitpunkt T an der Position $v_S \cdot T$ und registriert deshalb zu diesem Zeitpunkt den Wellenberg (I). Da eine Periodendauer vergangen ist, emittiert der Rettungswagen zu genau diesem Zeitpunkt eine zweite Wellenfront (II). Diese muss eine kürzere Strecke zurücklegen um an die Position des Fußgängers zu gelangen, nämlich: $v_S \cdot T - v_{RW} \cdot T$. Hierfür benötigt sie die Zeitspanne:

   $$T' = \frac{(v_S - v_{RW})T}{v_S}$$

   woraus wir unmittelbar die vom Fußgänger registrierte Frequenz erhalten:

   $$\nu' = \frac{1}{T'} = \frac{v_S}{v_S - v_{RW}}\nu = \underline{2658\text{Hz}}$$

   ii. (Rettungswagen bewegt sich vom Fußgänger weg): Durch eine analoge Überlegung ergibt sich:

   $$T' = \frac{(v_S + v_{RW})T}{v_S}$$

   $$\Rightarrow f' = \frac{v_S}{v_S + v_{RW}}\nu = \underline{2187\text{Hz}}$$

   b) nun sind Quelle und Beobachter bewegt:
   Zu $t = 0$ befinde sich (RW) wieder bei $x = 0$ und emittiere einen Wellenberg (I). Nach einer Periodendauer $t = T$ befindet sich (I) an der Stelle $-v_S \cdot T$

(Die Welle breitet sich auch nach hinten aus), (RW) befindet sich bei $v_{RW} \cdot T$ und das Auto (A) befinde sich o.b.d.A bei $-v_S \cdot T$. Der Autofahrer registriert also genau zu diesem Zeitpunkt (I). Zum selben Zeitpunkt emittiert (RW) den zweiten Wellenberg (II). In der Zeitspanne T' zwischen Eintreffen von (I) und (II) beim Autofahrer (A) legt (A) die Strecke $v_A \cdot T'$ und (II) die Strecke $v_S \cdot T'$ zurück. Die Summe dieser beiden Strecken entspricht aber gerade dem Abstand der beiden Wellenberge $(v_S + v_{RW})T$ im Ruhesystem:

$$(v_A + v_S)T' = (v_S + v_{RW})T$$

$$\Rightarrow T' = \frac{v_S + v_{RW}}{v_S + v_A}T$$

$$\Rightarrow \nu' = \frac{1}{T'} = \frac{v_s + v_A}{v_S + v_{RW}}\nu = \underline{2241\text{Hz}}$$

6.

$$x_n = \frac{\lambda}{4\pi}\big((2n+1)\pi + \phi\big)$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{2} = \frac{v_S}{2\nu} = 1,07\text{m}$$

Der Lautsprecher muss also $\underline{4\Delta x = 4,29\text{ m}}$ von der Wand entfernt stehen und die Omas jeweils $\underline{1\Delta x = 1,07\text{ m}}$, $\underline{2\Delta x = 2,14\text{ m}}$ und $\underline{3\Delta x = 3,22\text{ m}}$.

7. a) Konstruktive Interferenz für $\Delta x = n \cdot \lambda = n \cdot \frac{v_S}{\nu}$

$$\Rightarrow \nu = \frac{v_S}{\Delta x} \cdot n$$

$$\nu_{min} = \frac{v_S}{\Delta x} = \underline{428,75\text{Hz}}$$

b) Maximal möglicher Gangunterschied bei dieser Konfiguration ist 2 m. Minimaler überhaupt möglicher Abstand d. Mikrofons von Quelle 2 = 5 m.
Bedingung für destr. Interferenz:

$$\Delta x = (n + \frac{1}{2})\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x \cdot \nu}{v_S} - \frac{1}{2} = \frac{2\text{m} \cdot 428,75\text{Hz}}{343\text{ms}^{-1}} - \frac{1}{2} = n' = 2$$

Da n' gerade ist, ist der minimale Abstand schon gefunden und zwar der, bei dem der Gangunterschied $\Delta x = 2$ m. Das ist gerade dann der Fall, wenn das Mikrofon 5 m von Quelle 2 entfernt ist.
Auch beim maximal überhaupt möglichen Abstand des Mikrofons von Quelle 2 (der = 7 m) tritt ein Gangunterschied von $\Delta x = 2$ m auf also ist dies auch der maximal mögliche Abstand für destruktive Interferenz. Auch hier ist natürlich $n = 2$.

8. a) Zur Bestimmung der Frequenz betrachte zwei Signale, die eine Periodendauer T nacheinander vom blauen Boot ausgesandt werden und sich mit Geschwindigkeit c fortbewegen. Der zeitliche Abstand, in dem sie das rote Boot erreichen, entspricht der verkürzten Periodendauer T'. Die Ortsfunktionen der beiden Signale lauten:

$$x_1 = c \cdot t \qquad x_2(t) = v_b \cdot T + c(t - T)$$

Das rote Boot bewegt sich mit Geschwindigkeit v_r auf das blaue Boot zu:

$$x_r = x_0 - v_r \cdot t$$

Durch Gleichsetzen der Ortsfunktionen erhält man die Zeiten t_1 und t_2, zu den die Signale das rote Boot erreichen:

$$t_1 = \frac{x_0}{c + v_r} \qquad t_2 = \frac{x_0}{c + v_r} - T\frac{v_b - c}{c + v_r}$$

Die Differenz der beiden Zeiten gibt die neue Periodendauer T':

$$T' = T\frac{c - v_b}{c + v_r}$$

Mit $f = 1/T$ folgt:

$$f' = f\frac{c + v_r}{c - v_b}$$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$f' = 1,022\text{kHz}$$

b) Die reflektierte Welle entspricht einer Welle, die vom roten Boot mit der Frequenz f' aus (a) ausgesendet wird. Durch Vertauschen der beiden Boote erhält man analog zu (a) einen Ausdruck für die Frequenz f'', die vom blauen Boot registriert wird:

$$f'' = f'\frac{c + v_b}{c - v_r}$$

Einsetzen ergibt

$$f'' = 1,045\text{kHz}$$

9. a) Es ist ein Ton zu hören und der hat die Frequenz:

$$\overline{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \underline{800\text{Hz}}$$

Dieser Ton wird lauter und leiser mit der Frequenz

$$\frac{\Delta\omega}{2} = \underline{1\text{Hz}}$$

b) Abstand zweier benachbarter Schwebungsminima: $\frac{2\pi}{\Delta k}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2\pi}{\Delta k}}{\frac{2\pi}{\overline{k}}} = \frac{\overline{k}}{\Delta k} = \frac{\overline{\omega}}{\Delta\omega} = \underline{800}$$