Lösungsvorschlag

Mittwoch / Schwingungen

1. In Ruhelage gilt $F_g = m \cdot g = k \cdot l = F_k$ wobei $l = 6$ cm die Auslenkung in der Ruhelage und k die Federkonstante beschreibt. Für k gilt also:

$$k = \frac{mg}{l} \approx 3,27\,\mathrm{kgs}^{-2} \tag{0.1}$$

Für ein Federpendel gilt allgemein

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{0.2}$$

mit $\omega = \sqrt{k/m}$ (hier: $\omega \approx 12,8$ Hz) wenn $x(t)$ die Auslenkung aus der Ruhelage beschreibt.

Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ erhält man

$$A\cos(\phi) = x_0 \tag{0.3}$$

$$-A\omega\sin(\phi) = v_0 \tag{0.4}$$

$$\Rightarrow A = \frac{x_0}{\cos(\phi)}, \qquad \phi = \tan^{-1}(\frac{-v_0}{x_0\omega}) \tag{0.5}$$

a) Mit den Anfangsbedinungen $x_0 = -2$ cm und $v_0 = 0$ folgt $\phi = 0$ und $A = -2$ cm, also

$$x(t) = -2\,\mathrm{cm}\cos(\omega t) \tag{0.6}$$

b) Für $x_0 = -3$ cm und $v_0 = -2$ m/s ist $\phi \approx -1,38$ und $A \approx -15,9$ cm,

$$x(t) = -15,9\,\mathrm{cm}\cos(\omega t - 1,38) \tag{0.7}$$

2. Strategie:
1. Man nimmt einen beliebigen Massepunkt m (z.B. Stein), hängt ihn an die Feder und lenkt die Feder aus. Man misst die Schwingungsfrequenz (bzw. die Periodendauer) und kann daraus die Masse berechnen, wegen

$$T = 2\pi\sqrt{m/D}$$

2. Man kennt nun die Masse und kann aus der Auslenkung der Feder die Gravitationsbeschleunigung berechnen:

$$m \cdot g* = D\Delta x$$

Bei bekanntem Radius R erhält man daraus für die Masse des Planeten:

$$M = \frac{R^2 \cdot g*}{\gamma} \quad \text{mit} \quad \gamma = \text{Gravitationskonstante}$$

$$\Longrightarrow \quad M = \frac{R^2 4\pi^2 \Delta x}{T^2\gamma}$$

3. a) Würde der Neigungswinkel 90° betragen, so hätten wir es mit einem ganz normalen Federpendel zu tun. Da aber in Aufgabenteil c) expilizit nach der α Abhängigkeit gefragt ist, werden wir diese gleich in der Bewegungsgleichung berücksichtigen. Wir setzten daher $x = 0$ an den Ort, an dem sich das Drahtende befindet, wenn die Masse noch nicht angehängt wurde, beschreiben also den Zustand der ungespannten Feder. Insgesamt ergibt sich dann für die Bwegungsgleichung des Systems unter Vernachlässigung der Reibung

$$m\ddot{x} = -(kx + mg\sin\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + kx = mg\sin\alpha$$

b) Wir wählen als Ansatz für die homogene Lösung

$$x(t) = A\sin\omega t$$

Ableiten und Einsetzen in die homogene Lösung liefert

$$-m\omega^2\sin\omega t + k\sin\omega t = 0$$

und damit durch Koeffizientenvergleich

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Longrightarrow \quad k = \omega^2 \cdot m = (2\pi \cdot 10\text{Hz})^2 \cdot 1\text{kg} = 3947{,}8\text{N/m} \approx 4\text{kN/m}$$

c) Die Eigenfrequenz hängt nicht vom Winkel α ab. Die Ruhelage allerdings schon. Wer's nicht glaubt, löst einfach die inhomogene DGL. Eine spezielle Lösung x_s lautet

$$x_s = \frac{-mg\sin\alpha}{k}$$

und damit die vollständige Lösung der DGL:

$$x(t) = A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{mg\sin\alpha}{k}$$

N.B.: Lasst Euch nicht verwundern, dass jetzt hier bei einer inhomogenen DGL zweiter Ordnung die „vollständige Lösung“ nur aus einer Linearkombination von zwei Termen besteht. Mathematisch korrekt hätte man oben natürlich eine Linearkombination aus Sinus und Kosinus, bzw. eine Phase oder einen e-Funktion Ansatz verwenden müssen. Da wir aber unsere Anfangsbedingung einfach so wählen können, dass es passt (also zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ keine Phasenverscheibung), ist dies hier die vollständige Lösung. Wir haben also implizit schon die Randbedingungen eingearbeitet.

4.

(a) Die Massen haben zu Beginn den Abstand der Ruhelänge der Feder, L. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1 - L) && (14) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1 - L) && (15) \end{aligned}$$

(Konvention: Die linke Masse bekommt Index 1 und die x-Koordinaten sind nach rechts positiv. Der Kraftstoß wirke auf die Masse 1 in positive x-Richtung.) Um die Bewegungsgleichungen zu lösen, muss man auf die Idee kommen, Schwerpunkt- und Relativkoordinaten X und r einzuführen:

$$X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad , \quad r = x_2 - x_1 \tag{16}$$

Die Bewegungsgleichungen dafür erhält man als Summe bzw. Differenz der Bewegungsgleichungen für x_1 und x_2:

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= 0 && (17) \\ m\ddot{r} &= -2kr - 2kL && (18) \end{aligned}$$

Die Schwerpunktsgleichung hat die Lösung

$$X(t) = V_0 t + X_0 \tag{19}$$

mit

$$V_0 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)) \tag{20}$$

Aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0 \quad , \quad \dot{x}_1(0) = \frac{\Delta p}{m} && (21) \\ x_2(0) &= L \quad , \quad \dot{x}_2(0) = 0 && (22) \end{aligned}$$

erhält man

$$X(t) = \frac{\Delta p}{2m} t + \frac{L}{2} \tag{23}$$

Die Gleichung für die Relativbewegung

$$m\ddot{r} + 2kr = 2kL \tag{24}$$

hat die allgemeine homogene Lösung

$$r_h(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{25}$$

mit $\omega = \sqrt{2k/m}$. Eine spezielle inhomogene Lösung rät man leicht: $r_s(t) = L$. Also

$$r(t) \;=\; a\cos\omega t + b\sin\omega t + L \tag{26}$$

Einarbeiten der Anfangsbedingungen:

$$r(0) \overset{!}{=} L \quad \Rightarrow \quad a = 0 \tag{27}$$

$$\dot{r}(0) \overset{!}{=} -\frac{\Delta p}{m} \quad \Rightarrow \quad b \;=\; -\frac{\Delta p}{m\omega} \tag{28}$$

Also

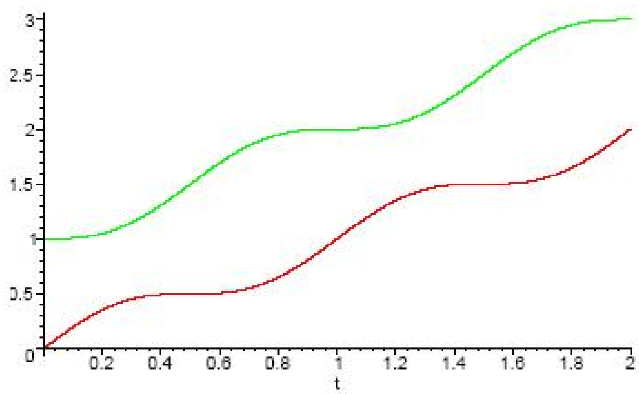
$$r(t) \;=\; L - \frac{\Delta p}{m\omega}\sin\omega t \tag{29}$$

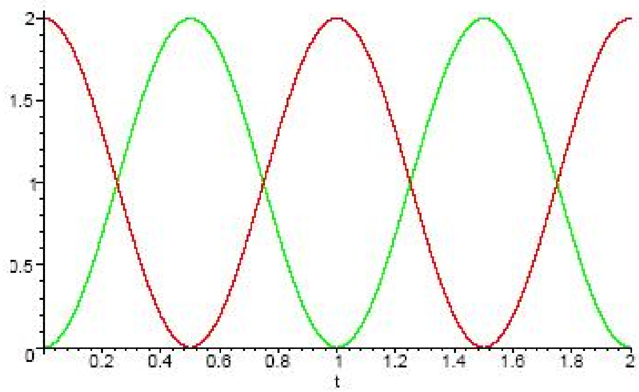
Im Ganzen

$$x_1(t) \;=\; X(t) - \frac{r(t)}{2} \;=\; \frac{\Delta p}{2m}t + \frac{\Delta p}{2m\omega}\sin\omega t \tag{30}$$

$$x_2(t) \;=\; X(t) + \frac{r(t)}{2} \;=\; L + \frac{\Delta p}{2m}t - \frac{\Delta p}{2m\omega}\sin\omega t \tag{31}$$

(b)





5. a) Der Wasserspiegel sei in Ruhe bei $z = 0$. Durch eine Auslenkung $z \neq 0$ entsteht ein Höhenunterschied von $2z$ zwischen den Säulen auf beiden Seiten, durch das Mehrgewicht der höheren Säule entsteht eine Rückstellkraft von

$$F = m \cdot g = 2z \cdot A \cdot \rho \cdot g \tag{0.8}$$

wobei $A = \pi r_i^2$ die Oberfläche und ρ die Dichte des Wassers bezeichnen. Desweiteren gilt

$$F = M \cdot a = V \cdot \rho \cdot \ddot{z} \tag{0.9}$$

für das Gesamtvolumen V des Wassers. Die Bewegungsgleichung lautet also

$$V\rho\ddot{z} = 2zA\rho g \tag{0.10}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} - \frac{2Ag}{V}z = 0 \tag{0.11}$$

Mit dem Ansatz $z(t) = A\cos(\omega t)$ folgt

$$\omega = \sqrt{\frac{2Ag}{V}} \approx 4,53\,\mathrm{s}^{-1} \tag{0.12}$$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 0,72\,\mathrm{Hz} \tag{0.13}$$

b) Bei einem verschlossenen Rohr wird bei der Auslenkung die Luft oberhalb des Wassers komprimiert, was zu einer vergrößerten Rückstellkraft führt. Dadurch wird die Amplitude kleiner, die Frequenz größer.

6. a) Für eine harmonische Schwingung gilt $T = \frac{2\pi}{\omega}$ es folgt also $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot 1,25$ Hz. Außerdem gilt

$$x(t) = A\cos(\omega t) \quad \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t) \quad \ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) \tag{0.14}$$

Die Beschleunigung ist also maximal, wenn der Kosinusterm eins wird und es gilt

$$a_{max} = -A\omega^2 = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \tag{0.15}$$

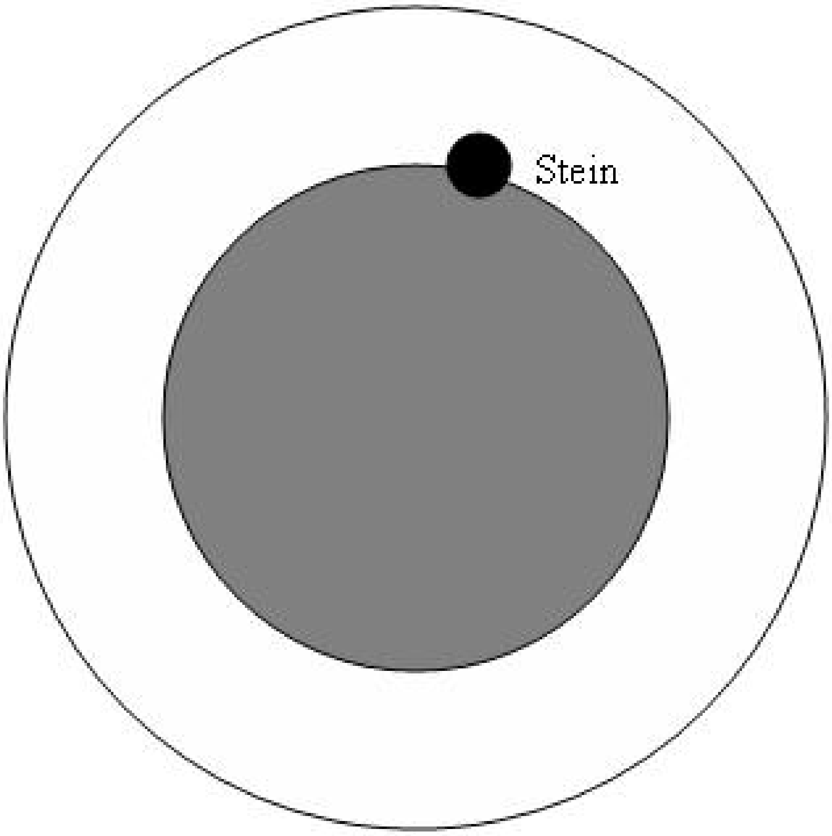
Für $A = 0,01$ m ist $|a_{max}| = 0,62$ ms$^-$2. Für die Haftreibungskraft gilt $F_H = \mu_H mg$, damit der Klotz verrutscht muss also gelten $m \cdot a > \mu_h mg$, also $a > 2,45$ ms^{-2}. Folglich verrutscht der Klotz nicht.

b)

$$A_{max} = \frac{a_{max}T^2}{(2\pi)^2} \approx 0,0397\,\mathrm{m} \tag{0.16}$$

Die maximal mögliche Amplitude beträgt also in etwa 4 cm.

7. Wir setzen den Nullpunkt unseres Koordinatensystems in den Mittelpunkt der Erde. Auf den Stein wirkt effektiv nur die Gravitationskraft, die durch die innere Teilkugel (grau) ausgeübt wird. Die Effekte der Schale (weiß) mitteln sich weg.



Die Masse Mder Teilkugel in Abhängigkeit vom Abstand zum Mittelpunkt x ergibt sich (homogene Erde) zu:

$$M(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 \rho \quad \text{mit } \rho = \text{Dichte der Erde}$$

Für die Gravitationskraft gilt(wir beschränken uns darauf nur mit den Beträgen zu rechnen, weil es ein effektiv eindimensionales Problem ist):

$$F = -\gamma \frac{mM}{x^2}$$

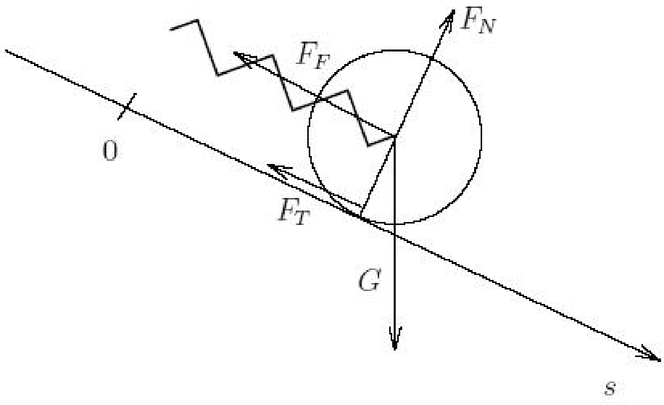
Einsetzen der Masse M in diese Formel liefert die auf den Stein wirkende Kraft:

$$F = -\frac{4\gamma m \rho \pi}{3} x$$

Die Bewegung gehorcht einem linearen Kraftgesetz und ist daher eine harmonische Schwingung. Die Schwingungsdauer beträgt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{D}{m}} = 2\pi \sqrt{\frac{4}{3}\gamma \rho \pi}$$

8.



Auf den Zylinder wirken die in der Abbildung dargestellten Kräfte:

1. Gewichtskraft G
2. Normalkraft F_N der Ebene
3. Tangentialkraft F_T der Ebene (verhindert Rutschen)
4. Kraft F_F der gespannten Feder

Daraus lassen sich die folgenden Bewegungsgleichungen für die Streckenkoordinate s und den Drehwinkel bzgl. Schwerpunkt φ aufstellen:

$$M\ddot{s} = Mg\sin\alpha - F_T - F_F \tag{9}$$
$$\Theta\ddot{\varphi} = RF_T \tag{10}$$

Die Federkraft F_F ist als Funktion von s bekannt:

$$F_F = 2Ds \tag{11}$$

(F_F bezeichnet hier nur die Beträge der Kräfte.)

Die Tangentialkraft F_T ist nicht bekannt, allerdings gibt es als zusätzliche Gleichung noch die Rollbedingung:

$$\ddot{s} \;=\; R\ddot{\varphi} \tag{12}$$

Damit hat man nun 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten $\ddot{s}$, $\ddot{\varphi}$ und F_T. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} M\ddot{s} \;&=\; Mg\sin\alpha - \frac{\Theta}{R}\ddot{\varphi} - 2Ds & (13)\\ &=\; Mg\sin\alpha - \frac{\Theta}{R^2}\ddot{s} - 2Ds & (14)\end{aligned}$$

also

$$\left(M + \frac{\Theta}{R^2}\right)\ddot{s} \;+\; 2Ds \;=\; Mg\sin\alpha \tag{15}$$

Wegen $\Theta = \frac{1}{2}MR^2$ für einen homogenen Vollzyinder ist dies:

$$\frac{3}{2}M\ddot{s} + 2Ds \;=\; Mg\sin\alpha \tag{16}$$

Die Ruhelage folgt hieraus zu

$$s_0 \;=\; \frac{Mg\sin\alpha}{2D} \tag{17}$$

Ersetzt man in der Bewegungsgleichung s durch die Auslenkung σ mit $s = s_0 + \sigma$, dann erhält man:

$$\frac{3}{2}M\ddot{\sigma} + 2D\sigma \;=\; 0 \tag{18}$$

Die Schwingungsdauer für Schwingungen um die Ruhelage ist also

$$T \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{3M}{4D}} \tag{19}$$

also unabhängig von α und von R.

9. a) Potentielle Energie:

$$U(x) = m \cdot g \cdot h = mgax^2 \tag{0.17}$$

b) Die Kraft beträgt:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -2mgax \tag{0.18}$$

Die Differentialgleichung lautet damit:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F(x) & (0.19)\\ \Rightarrow \ddot{x} + 2gax &= 0 & (0.20)\end{aligned}$$

c) Mit Ansatz

$$x(t) = A\cos(\omega t) \tag{0.21}$$

folgt nach Einsetzen in (0.20):

$$-\omega^2 \cdot A\cos(\omega t) + 2ga\cos(\omega t) = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{2ga} \tag{0.22}$$

d) Die allgemeine Lösung lautet dann:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{0.23}$$

Mit Bedingung $\dot{x}(0) = 0$ folgt:

$$-A\omega\sin(\phi) = 0 \tag{0.24}$$

$$\Rightarrow \phi = n\pi, n \in Z \tag{0.25}$$

$$\tag{0.26}$$

OBdA gilt: $\phi = 0$. Mit Bedingung $x(0) = x_0$

$$A\cos(0) = x_0 \tag{0.27}$$

Die Lösung der Bewegnungsgleichung lautet also:

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) \qquad \text{mit}\omega = \sqrt{2ga} \tag{0.28}$$

10. a) Einsetzen von $x(t) = ce^{-pt}$ in die Bewegungsgleichung ergibt

$$c(mp^2 - rp + s) = 0 \tag{0.29}$$

Nach Auflösen nach p erhält man

$$p = \frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{s}{m}} \tag{0.30}$$

Für die Art der Schwingung ist nun entscheidend, ob der Term unter der Wurzel positiv oder negativ ist (bzw ob $p \in R$). Es gilt

- $s < \frac{r^2}{4m}$: $p \in R$, starke Dämpfung
- $s = \frac{r^2}{4m}$: $p \in R$, kritsche Dämpfung
- $s > \frac{r^2}{4m}$: $p = \frac{r}{2m} \pm \mathrm{i}\omega, \omega \in R$, schwache Dämpfung

b)

$$\frac{r^2}{4m} = \frac{(30 \cdot 10^3\,\mathrm{kgs}^-1)^2}{80 \cdot 10^3 kg} = 11,25\,\mathrm{kNm}^{-1} = s \tag{0.31}$$

Das System ist also kritisch gedämpft.

c) Anfangsbedingungen:

i. $x(0) = 0$
ii. $\dot{x}(0) = v$

Mit i folgt $C = 0$, mit ii und

$$\dot{x}(t) = e^{-pt}(D - p(C + Dt)) \tag{0.32}$$

folgt $D - pC = v$ bzw $D = v$. Es gilt also

$$x(t) = vt \cdot e^{-r/2mt} \tag{0.33}$$
$$= t\,\mathrm{ms}^{-1} \cdot e^{-\frac{3}{4s}t} \tag{0.34}$$

Maximale Auslenkung bei t_0 mit

$$\dot{x}(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{4}{3}\,\mathrm{s} x(t_0) = 0,49\,\mathrm{m} \tag{0.35}$$

Da der Waggon an dem Puffer anliegt, wird er mitbeschleunigt aber nicht abgebremst. Er rollt also mit der Maximalgeschwindigkeit weiter. Bedingung für maximales $\dot{x}$:

$$\ddot{x} = 0 \tag{0.36}$$
$$\Rightarrow t = \frac{8}{3}\,\mathrm{s} \tag{0.37}$$
$$\dot{x}(\frac{8}{3}\,\mathrm{s}) = -0,135\,\mathrm{ms}^{-1} \tag{0.38}$$

Der Waggon rollt also mit 0,135 m/s davon.