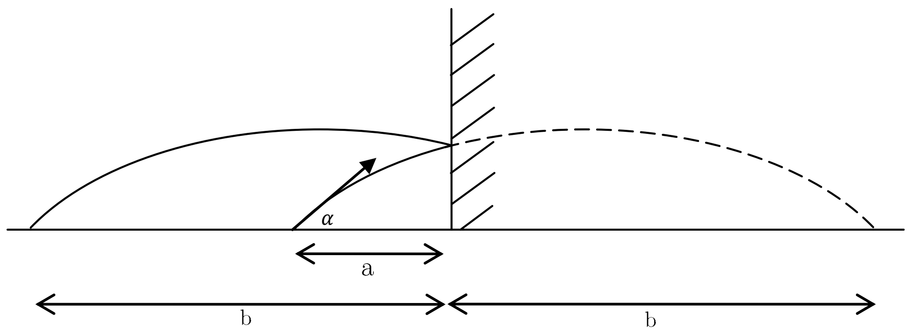
Lösungsvorschlag

Dienstag / Systeme von MP und Dynamik starrer Körper

1. **Ball gegen Wand**



Die y-Komponente der Geschwindigkeit steht parallel zur Wand. Daher bleibt die y-Komponente der Geschwindigkeit erhalten.

Der Körper trifft mit $\overrightarrow{v_x}$ senkrecht auf die Wand. Da deren Masse unendlich ist, wechselt die x-Komponente das Vorzeichen (Impulserhaltungssatz).

Die Lösung wird deutlich vereinfacht, indem man sich vorstellt, dass der Richtungswechsel in x-Richtung nicht stattfindet. Das Problem vereinfacht sich dann zum schiefen Wurf.

$$\begin{aligned} & v_x = v_0 \cos\alpha \qquad v_y = v_0 \sin\alpha \\ & y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad x = v_x t \\ \Longrightarrow \quad & y = \frac{x v_y}{v_x} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_x^2} \end{aligned}$$

Der Ball prallt in unserem Modell an der Stelle $(a+b, 0)$ wieder auf dem Boden auf.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{(a+b)v_y}{v_x} - \frac{1}{2} g \frac{(a+b)^2}{v_x^2} \\ a+b &= \frac{2 v_y v_x}{g} \\ b &= \frac{2 v_y v_x}{g} - a \\ b &= \frac{2 v_0^2 \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}}{g} - a \approx 8,7\ m \end{aligned}$$

2. **Trägheitsmoment eines Kegels**

Mit dem Satz von Steiner wird zunächst das Trägheitsmoment bei Rotation um den

Schwerpunkt senkrecht zur Kegelachse berechnet

$$
\begin{aligned}
I_{Spitze} &= (\frac{3}{4}h)^2 m + I_{Schwerpunkt} \\
I_{Schwerpunkt} &= m(\frac{3}{5}h^2 + \frac{3}{20}r^2) - (\frac{3}{4}h)^2 m = m(\frac{3}{80}h^2 + \frac{3}{20}r^2) \\
I_{Grundfläche} &= (\frac{1}{4}h)^2 m + m(\frac{3}{80}h^2 + \frac{3}{20}r^2) = m(\frac{1}{10}h^2 + \frac{3}{20}r^2)
\end{aligned}
$$

3. **Kugeln** Zur Bestimmung der Geschwindigkeit der Kugeln unmittelbar vor dem Aufprall wird die Energieerhaltung ausgenutzt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m_{ges}v^2 = m_{ges} \cdot g \cdot h_0 \tag{0.1}$$

$$\Rightarrow v = \pm\sqrt{2gh_0} \tag{0.2}$$

Da die Kugeln sich nach unten bewegen ist $v_1 = v_2 = -v$. Betrachtet man nun zuerst den (elastischen) Stoß der großen Kugel am Boden, erhält man:

$$\text{vorher: } v_2 = -v \qquad \text{nachher: } v_2 = v \tag{0.3}$$

Außerdem gilt natürlich weiterhin $v_1 = -v$. Nun betrachtet man den (auch elastischen) Stoß der beiden Kugeln im Schwerpunktsystem. Für die Bewegung des Schwerpunkts gilt

$$v_S = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{3mv}{5m} = \frac{3}{5}v \tag{0.4}$$

für die Bewegungen der Punkte im Schwerpunktsystem

$$v_i^S = v_i - v_S. \tag{0.5}$$

Für elastische Stöße im Schwerpunktsystem gilt

$$v'^S_i = -v_i^S \tag{0.6}$$

wobei v'^S_i die Geschwindigkeit nach dem Stoß beschreibt. Diese lässt sich dann ins Laborsystem zurücktransformieren:

$$v'_i = v_S + v'^S_i = v_S - v_i^S = 2v_S - v_i \tag{0.7}$$

Einsetzen der Werte ergibt:

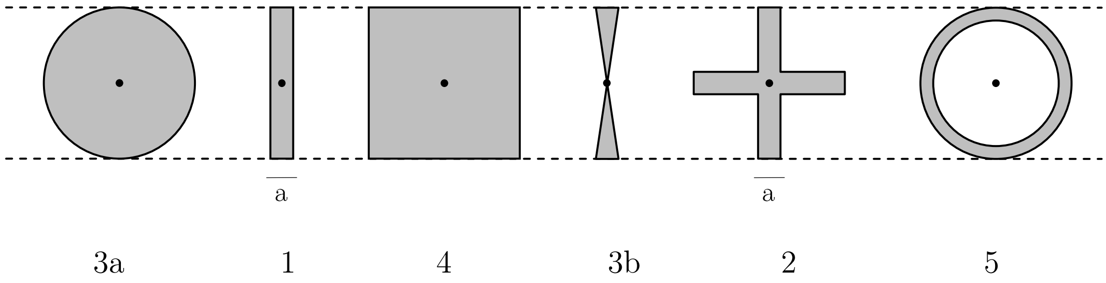
$$v'_1 = \frac{6}{5}v + v = \frac{11}{5}v \tag{0.8}$$

$$v'_2 = \frac{6}{5}v - v = \frac{1}{5}v \tag{0.9}$$

Die Sprunghöhe errechnet sich nun wieder mit Hilfe der Energieerhaltung:

$$h_1 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{121}{25}h_0 \qquad h_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{1}{25}h_0 \tag{0.10}$$

4. **Verständnisfrage Trägheitsmoment**



Die Definition des Trägheitsmoments lautet

$I = \int_V \vec{r_\perp}^2 dm$

Laut Aufgabenstellung haben alle Körper die gleiche Gesamtmasse. Es kommt nun darauf an, welche Anteile davon in welcher Entfernung zur Achse stehen.

Da es nur auf die Entfernung zur Achse ankommt ist es egal, ob die Masse homogen auf einer Kreisscheibe oder einem Kreissektor verteilt ist. Damit haben die Kreisschiebe (3a) und der aus zwei Kreissektoren bestehende Körper (3b) das gleiche Trägheitsmoment. Wer ganz genau hinsieht wird feststellen, dass es sich bei (3b) nur annähernd um Kreissektoren handelt. Exakt sind es zwei Dreiecke. Der Dreiecksanteil über dem fiktiven Kreisbogen geht mit einem sehr großen Abstandsquadrat in das Integral ein, daher wird 3b ein geringfügig größeres Trägheitsmoment als 3a haben.

$\Longrightarrow I_{3a} \approx I_{3b}$

Der Stab (1) hat im Vergleich zu (3b) mehr Massenanteile weiter an der Achse.

$\Longrightarrow I_1 < I_{3a} \approx I_{3b}$

Da die Masse innerhalb des Kreuzes (2) homogen verteilt ist, hat es größere Massenanteile weiter außen als der Stab (1).

$\Longrightarrow I_1 < I_2 < I_{3a} \approx I_{3b}$

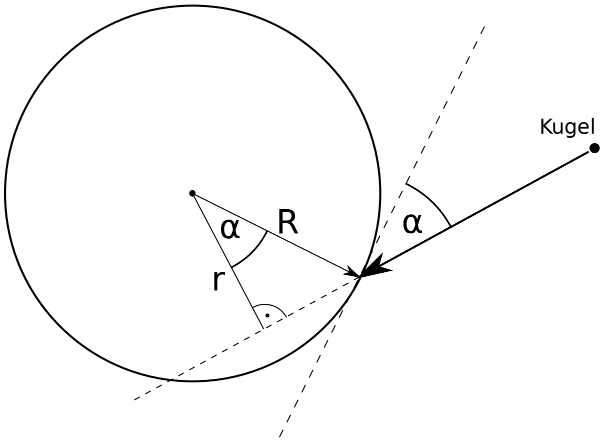
Ebenso hat das Quadrat (4) durch die Ecken größere Anteile außerhalb als die Kreisscheibe (3a)

$\Longrightarrow I_1 < I_2 < I_{3a} \approx I_{3b} < I_4$

Im Ring sind alle Massenanteile am äußeren Rand positioniert und es geht daher die gesamte Masse mit einem sehr großen Abstandsquadrat gewichtet in das Integral ein. Die kleinen Massenanteile des Quadrats, die noch weiter außen positioniert sind haben dagegen nur einen relativ kleinen Effekt.

$\Longrightarrow I_1 < I_2 < I_{3a} \approx I_{3b} < I_4 < I_5$

5. **Reifen**



a) Drehimpuls der Kugel:

$$L = m \cdot v \cdot r = m \cdot v \cdot R\cos(\alpha) \tag{0.11}$$

b) Es gilt Drehimpulserhaltung. Für das Trägheitsmoment des Reifens gilt bei Vernachlässigung der Dicke:

$$I = \int r^2 dm = R^2 \int 1 dm = R^2(M+m) \tag{0.12}$$

Mit $L = I\omega$ folgt

$$\omega = \frac{L}{I} = \frac{mv\cos(\alpha)}{R(M+m)}. \tag{0.13}$$

6. **Aufgehängter Zylinder**

Die Kraft des Antriebsstabes greift im Schwerpunkt der Zylinderkombination an. Daher werden die Zylinder vom Laborsystem aus betrachtet nicht in Drehung versetzt, sondern nur transliert.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m(\omega(t)a)^2$$
$$\omega(t) = \int_0^t \dot{\omega}dt' = \dot{\omega}t$$
$$E_{kin} = \frac{1}{2}m(\dot{\omega}ta)^2$$

7. **Windrad**

a)

$$\omega = \frac{20,3 \cdot 2\pi}{60s} \qquad l_{approx} = d/2$$
$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$
$$I_{Stab} = \frac{1}{3}ML^2$$
$$I_{Rotor} = 3\frac{1}{3}\frac{m}{3}(\frac{d}{2})^2 = \frac{1}{12}md^2$$
$$E_{Flügel} = \frac{1}{2}\frac{1}{12}md^2\omega^2 = \frac{1}{24}md^2\omega^2 \approx 58,2\ MJ$$

b)

$$P = \frac{W}{t}$$
$$t = \frac{W}{P} = \frac{58,2MJ}{1,530MW} \approx 38\ s$$

8. **Stoß**

a) Situation vor dem Stoß:

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 \qquad p = Mv \tag{0.14}$$

Nach dem Stoß:

$$E' = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mv_K^2 \qquad p' = Mv' + mv_K \tag{0.15}$$

wobei v_K die Geschwindigkeit der Kugel unmittelbar nach dem Stoß bezeichnet. Es gilt Energie- und Impulserhaltung, also $E = E'$ und $p = p'$. Mit Hilfe der Impulsgleichung lässt sich v_K aus der Energiegleichung eliminieren:

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{M}{m}(v - v')\right)^2 \tag{0.16}$$

Nach Umformen erhält man eine quadratische Gleichung für v'

$$v'^2 - \frac{2vM}{m+M}v' + v^2\frac{M-m}{M+m} = 0 \Rightarrow v'_{1/2} = v\frac{M \pm m}{m+M} \tag{0.17}$$

Die Lösung $v' = v$ passt offensichtlich nicht auf das beschriebene Problem, es bleibt

$$v' = v\frac{M-m}{M+m} \tag{0.18}$$

b) Für die maximale potentielle Energie der Kugel gilt (falls die Kugel ausschlägt und dann wieder zurückschwingt)

$$E_{pot} = E - \frac{1}{2}Mv'^2 \tag{0.19}$$
$$= \frac{1}{2}Mv^2\left(1 - \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\right) \tag{0.20}$$
$$= \frac{2mM^2v^2}{(M+m)^2} \tag{0.21}$$

Außerdem ist $E_{pot} = m \cdot g \cdot h = mgl(1 - \cos(\varphi))$. Es folgt

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{2M^2v^2}{(m+M)^2gl} \tag{0.22}$$
$$\tag{0.23}$$

Einsetzen der Werte ergibt

$$\cos(\varphi) \approx 0,909 \tag{0.24}$$
$$\varphi \approx 24,6^\circ \tag{0.25}$$

c) Für eine komplette Kreisbewegung muss das Seil zu jeder Zeit gespannt sein, es muss also auch am obersten Punkt die Fliehkraft mindestens so groß wie die Gravitationskraft sein. Im Grenzfall gilt

$$F_Z = F_G \tag{0.26}$$

$$m \cdot l \cdot \left(\frac{v_0}{l}\right)^2 = m \cdot g \tag{0.27}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{gl} \tag{0.28}$$

Desweiteren gilt (Energieerhaltung)

$$Mv^2 = 2mgh + mv_0^2 + Mv'^2 \tag{0.29}$$

$$= 4mgl + mgl + Mv^2 \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \tag{0.30}$$

Durch Auflösen nach v erhält man die minimal nötige Geschwindigkeit:

$$v = \frac{M+m}{2M}\sqrt{5gl} \tag{0.31}$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{5gl} \approx 5,25\ \frac{m}{s} \tag{0.32}$$

9. **Rohre ineinander**

a)

Der Gesamtdrehimpuls ist 0, daher gilt.

$I_r\omega_r = I_R\omega_R$

Da die Masse vollständig im Rand konzentriert ist gilt

$$\begin{aligned} & I_i = mr_i^2 \\ & m_i = \rho l \Delta d 2\pi r_i = \alpha r_i \\ \Longrightarrow\ & I_i = \alpha r_i^3 \end{aligned}$$

$\frac{\omega_r}{\omega_R} = \frac{\alpha R^3}{\alpha r^3} = \frac{R^3}{r^3}$

Das kleine Rohr hat die größere Winkelgeschwindigkeit.

b)

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\frac{E_r}{E_R} = \frac{\alpha r^3\omega_r^2}{\alpha R^3\omega_R^2} = \frac{R^3}{r^3}$$

10. **Projektil trifft Punktmassenrotor**

Es gilt Impulserhaltung, Drehimpulserhaltung und Energieerhaltung.

$v_R$bezeichne die Geschwindigkeit der von der Kugel getroffenen Rotormasse im Laborsystem v_E die der Erde nach dem Stoß im Laborsystem.

Das Aufstellen der Erhaltungssätze wird einfacher, indem man im im Versuchsaufbau nach bekannten Modellen sucht.

Der Rotor, bestehend aus beiden Punktmassen m, erfüllt die Bedingungen eines »starren Körpers«. Aufgrund seiner Symmetrie ist der Schwerpunkt im Aufhängepunkt.

Impulserhaltung:

Im Schwerpunktsystem des Rotors heben sich die Einzelimpulse auf. Vom Laborsystem aus betrachtet hat der Rotor daher einen Impuls von $2mv_E$.

$$
\begin{aligned}
mv_K &= mv_K^{'} + Mv_E + 2mv_E \\
mv_K &= mv_K^{'} + (2m + M)\, v_E \qquad (i)
\end{aligned}
$$

Drehimpulserhaltung:

Der Drehimpuls eines abgeschlossenen Systems ist bzgl. einer beliegig gewählten Achse konstant.

Zunächst muss eine Rotationsachse Λ definiert werden. Wir wählen dazu die Rotationsachse des Rotors vor dem Stoß.

Vor dem Stoß besitzt nur die eintreffende Kugel einen Drehimpuls mav_K.

Nach dem Stoß kann der Drehimpuls des Rotors zerlegt werden in den Drehimpuls des Schwerpunkts im Laborsystem und den Drehimpuls der Punktmassen m um den Schwerpunkt. Da sich der Schwerpunkt des Rotors von der Rotationsachse Λ wegbewegt ist der erste Anteil 0. Der Drehimpuls der Punktmassen um den Schwerpunkt beträgt $ma(v_R - v_E) + m(-a)(-v_R + v_E)$.

$$
\begin{aligned}
mav_K &= mav_K^{'} + ma(v_R - v_E) + m(-a)(-v_R + v_E) \\
v_K &= v^{'K} + 2\,(v_R - v_E) \qquad (ii)
\end{aligned}
$$

Energieerhaltung:

Die Energie des Rotors nach dem Stoß kann zerlegt werden in die Energie des Schwerpunkts im Laborsystem und die Energie der Punktmassen im Schwerpunktsystem.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_K^2 &= \frac{1}{2}mv_K^{'2} + \frac{1}{2}(M + 2m)v_E^2 + m\,(v_R - v_E)^2 \\
mv_K^2 &= mv_K^{'2} + (M + 2m)\, v_E^2 + 2m\,(v_R - v_E)^2 \qquad (iii)
\end{aligned}
$$

Lösen des Gleichungssystems aus (i), (ii) und (iii):

(ii) in (iii)

$$
mv_K^2 = mv_K^{'2} + (M + 2m)\, v_E^2 + 2m\frac{(v_K - v_K')^2}{4} \qquad (iv)
$$

(i) in (iv)

$$
\begin{aligned}
mv_K^2 &= mv_K^{'2} + (M + 2m)\, m^2 \frac{\left(v_K - v_K^{'}\right)^2}{(2m + M)^2} + m\frac{\left(v_K - v_K^{'}\right)^2}{2} \\
(2M + 4m)\, mv_K^2 &= (2M + 4m)\, mv_K^{'2} + 2m^2 \left(v_K - v_K^{'}\right)^2 + m\,(M + 2m) \left(v_K - v_K^{'}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2M+4m)\,v_K^{'2} + 2m\left(v_K - v_K^{'}\right)^2 + (M+2m)\left(v_K - v_K^{'}\right)^2 - (2M+4m)\,v_K^2 &= 0\\
(2M+4m)\,v_K^{'2} + (M+4m)\left(v_K - v_K^{'}\right)^2 - (2M+4m)\,v_K^2 &= 0\\
(3M+8m)\,v_K^{'2} + (M+4m)\left(-2v_K v_K^{'}\right) - Mv_K^2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v^{\prime}_{K_{1,2}} &= \frac{2v_K\,(M+4m) \pm \sqrt{4v_K^2 + 4M\,(3M+8m)\,v_K^2}}{2\,(3M+8m)} =\\
&= \frac{M+4m \pm \sqrt{(M+4m)^2 + M\,(3M+8m)}}{3M+8m} v_K =\\
&= \frac{M+4m \pm \sqrt{16m^2+16mM+4M^2}}{3M+8m} v_K = \frac{M+4m \pm (4m+2M)}{3M+8m} v_K
\end{aligned}
$$

$$
v_{K_2}^{'} = v_K \qquad v_{K_2}^{'} = -\frac{M}{8m+3M} v_K
$$

Die Lösung v_K beschreibt das System vor dem Stoß , die andere nach dem Stoß . Nun wird aufgrund der großen Erdmasse der Grenzwert gebildet. Man erhält für die gesuchte Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoß:

$$
\lim_{M\to\infty} v_{K_2}^{'} = -\frac{v_K}{3}
$$

11. **Gravitationsstabilisierung *(Vertiefungsaufgabe)***

Zunächst muss der Radius der Kreisbahn berechnet werden, auf dem sich die kleine Masse nach Ausfahren bewegt. Da der Schwerpunkt des Satellitensystems beim Ausfahren unverändert bleibt gilt

$$
\frac{mr' + MR'}{m+M} = r \tag{0.33}
$$

$$
\frac{mr' + M(r'-h)}{m+M} = r \tag{0.34}
$$

$$
r' = r + \frac{M}{m+M} h \tag{0.35}
$$

Auf die kleine Masse wirken Gravitations- und Zentrifugalkraft, es gilt

$$
F_G = -\frac{mM_EG}{r'^2} \qquad F_Z = m\omega^2 r' = \frac{mM_EG}{r^3} r' \tag{0.36}
$$

Die Kraft auf die Masse m ist die Summe der beiden Teilkräfte

$$
F = F_Z + F_G = mM_EG\left(\frac{r'}{r^3} - \frac{1}{r'^2}\right) \approx \frac{mM_EG}{r^3} d \tag{0.37}
$$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$
F = 2,52 \cdot 10^{-6} N \tag{0.38}
$$

12. **Projektil trifft allgemeinen symmetrischen Rotor** ***(Vertiefungsaufgabe)***
homogene Stange
Impulserhaltung:

$$mv_K = mv_K^{'} + (M_E + M)\, v_S \qquad (i)$$

Drehimpulserhaltung:

$$mav_K = mav_K^{'} + I\omega \qquad (ii)$$

Energieerhaltung:

$$mv_K^2 = mv_K^{'2} + I\omega^2 + (M + M_E)\, v_S^2 \qquad (iii)$$

Lösen des Gleichungssystems aus (i), (ii) und (iii):
(ii) in (iii)
$mv_K^2 = mv_K^{'2} + ma\frac{(v_K - v_K')^2}{I} + (M + M_E)\, v_S^2 \qquad (iv)$
(i) in (iv)

$$\begin{aligned} mv_K^2 &= mv_K^{'2} + m^2a^2\frac{(v_K - v_K')^2}{I} + m^2\frac{(v_K - v_K')^2}{(M + M_E)} \\ I\,(M + M_E)\, mv_K^2 &= I\,(M + M_E)\, mv_K^{'2} + m^2a^2\,(M + M_E)\,(v_K - v_K')^2 \\ &\quad + m^2 I (v_K - v_K')^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I\,(M + M_E)\, mv_K^{'2} + m^2a^2\,(M + M_E)\,(v_K - v_K')^2 & \\ + m^2 I (v_K - v_K')^2 - I\,(M + M_E)\, mv_K^2 &= 0 \\ I\,(M + M_E)\, v_K^{'2} + m(a^2\,(M + M_E) + I)(v_K - v_K')^2 - I\,(M + M_E)\, v_K^2 &= 0 \\ \alpha := (M + M_E) & \\ I\alpha v_K^{'2} + m(a^2\alpha + I)(v_K - v_K')^2 - I\alpha v_K^2 &= 0 \\ I\alpha v_K^{'2} + m(a^2\alpha + I)(v_K^2 - 2v_K v_K' + v_K^{'2}) - I\alpha m v_K^2 &= 0 \\ (I\alpha + ma^2\alpha + mI) v_K^{'2} + 2m(-a^2\alpha - I) v_K v_K' + (-I\alpha + ma^2\alpha + mI) v_K^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'_{K_{1,2}} &= \frac{m(a^2\alpha + I) \pm \sqrt{m^2(a^2\alpha + I)^2 + (I\alpha + ma^2\alpha + mI)(I\alpha - ma^2\alpha - mI)}}{I\alpha + ma^2\alpha + mI} \\ &= \frac{m(a^2\alpha + I) \pm \sqrt{I^2\alpha^2}}{I\alpha + ma^2\alpha + mI} = \frac{m(a^2\alpha + I) \pm I\alpha}{I\alpha + ma^2\alpha + mI} \\ &= \frac{m(a^2\,(M + M_E) + I) \pm I\,(M + M_E)}{I\,(M + M_E) + ma^2\,(M + M_E) + mI} \end{aligned}$$

Die Lösung v_K beschreibt das System vor dem Stoß , die andere nach dem Stoß . Nun wird aufgrund der großen Erdmasse der Grenzwert gebildet.

$$v'_{K_{1,2}} = \frac{ma^2 \pm I}{I + ma^2}$$

$$v'_{K_1} = v_K \qquad v'_{K_2} = \frac{ma^2 - I}{ma^2 + I}$$