Christoph Buhlheller, Rebecca Saive, David Franke
Florian Hrubesch, Wolfgang Simeth, Wolfhart Feldmeier

Skript zum Ferienkurs Experimentalphysik I

Systeme von Massenpunkten
Dynamik starrer Körper

10. März 2009

INHALTSVERZEICHNIS

EINFÜHRUNG

Dieser Vorlesungsteil baut auf Kapitel 1 „Klassische Mechanik des Massenpunkts“ des vorherigen Skripts auf.

Die Kinematik beschreibt die Bewegung von Körpern ohne auf Kräfte als Ursache der Bewegung einzugehen. Mit Bewegungsgleichungen stellten wir einen Zusammenhang zwischen den physikalischen Größen eines sich bewegenden Massenpunktes her. Dazu gehören die Masse, der Ort, die Geschwindigkeit, die Beschleunigung und die Zeit.

Die Dynamik bezieht schließlich Kräfte als Ursache von Bewegungen mit ein. Die mathematische Beschreibung basiert auf den Newton’schen Axiomen.

Kernziel des vorliegenden Skripts ist, die Betrachtung von isolierten Massenpunkten auf beliebig viele zu erweitern und Spezialfälle wie den starren Körper zu betrachten. Der Stoff wiederholt im Wesentlichen die gleichnamigen Abschnitte 5 und 6 der Experimentalphysik-I-Vorlesung von Prof. Simmel.

Im Kapitel „Systeme von Massenpunkten“ beschäftigen wir uns mit Stößen mehrerer Massen und den Wechselwirkungen mit äußeren Kräften.

Im Kapitel „Dynamik starrer Körper“ betrachten wir einen Spezialfall eines Vielteilchensystems und wenden die physikalischen Konzepte des Schwerpunkts, des Drehmoments, des Drehimpulses darauf an. Schließlich führen wir das Trägheitsmoment ein.

1. SYSTEME VON MASSENPUNKTEN

Unter einem System von Massenpunkten versteht man beliebig viele Punktmassen, welche in verschiedenen Wechselwirkungen zueinander stehen können. Äußere Kräfte können auf das System einwirken, sofern es sich nicht um ein abgeschlossenes handelt.

1.1 Stöße

Man betrachte ein derartiges System von Massenpunkten, indem sich einige Massen so bewegen, dass es zum Stoß kommt. Bei allen Stößen gilt der Impulserhaltungssatz, d.h. der Gesamtimpuls[1] vor dem Stoß gleich dem Gesamtimpuls nach dem Stoß.

$$\boxed{\vec{p} = \text{const}}$$

Ist die Summe der kinetischen Energien beider Körper vor und nach dem Stoß identisch, nennt man den Vorgang *elastischen Stoß*.

Wird beim Stoß kinetische Energie in andere Energieformen umgewandelt, spricht man vom *inelastischen Stoß.*

1.2 Stöße im Schwerpunktsystem

Wir legen das Koordinatensystem nun in den Schwerpunkt und betrachten Vorgänge von dort aus. Dazu müssen wir zunächst den Schwerpunkt definieren.

Schwerpunkt eines Vielteilchensystems:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1} m_i \, \vec{r}_i$$ [2]

Der Ortsvektor $\vec{R}$ zeigt vom ruhenden Laborsystem auf den Schwerpunkt.

Für den Spezialfall zweier Massen m_1 und m_2 ergibt sich:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{\underbrace{m_1 + m_2}_{M}}$$

Nun analysieren wir verschiedene Eigenschaften die mit dem Schwerpunkt $\vec{R}$ zusammenhängen. Die Geschwindigkeit mit der sich dieser im Ruhesystem bewegt wird Schwerpunktgeschwindigkeit genannt.

[1] vektorielle Summe der Einzelimpulse

[2] Es wird von $i = 1$ bis n aufsummiert. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in diesem Skript das „n“ auf dem Summenzeichen weggelassen.

Die Schwerpunktgeschwindigkeit ist definiert als

$$\vec{v}_\mathrm{S} = \dot{\vec{R}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1} m_i\ \dot{\vec{r}}_i$$

Spezialfall zweier Massen:

$$\vec{v}_\mathrm{S} = \dot{\vec{R}} = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2}{\underbrace{m_1 + m_2}_{M}}$$

Unter dem Gesamtimpuls eines Systems versteht man die Geschwindigkeit des Schwerpunkts multipliziert mit der Gesamtmasse.

Gesamtimpuls

$$\vec{p}_\mathrm{S} = M\vec{v}_\mathrm{S}$$

Gemäß Definition der Schwerpunktgeschwindigkeit entspricht dies der Summe aller Einzelimpulse im Laborsystem, also $\vec{p}_S = \sum_{\mathrm{i}=1} m_\mathrm{i}\vec{v}_\mathrm{i}$.

Der Gesamtimpuls hängt nur von der Masse und von der Schwerpunktgeschwindigkeit ab. Dies bedeutet, dass sich die Impulse im Schwerpunktsystem immer aufheben.

Es gilt:

$$\boxed{\sum_{i=1}\vec{p}_{i\mathrm{S}} = \sum_{i=1} m_i\,\dot{\vec{r}}_{i\mathrm{S}} = 0}$$

$$\left(\quad \text{explizit:}\quad \sum_{i=1} m_i\dot{\vec{r}}_{i\mathrm{S}} = \sum_{i=1} m_i\left(\dot{\vec{r}}_i - \vec{v}_\mathrm{S}\right) = \sum_{i=1} m_i\dot{\vec{r}}_i - M\vec{v}_\mathrm{S} = 0 \quad\right)$$

Wie verhält sich der Gesamtimpuls, wenn man keine Kraft auf das System ausübt? Der Gesamtimpuls ist genau dann erhalten, wenn sich die zeitlichen Änderungen aller Einzelimpulse aufheben, was genau dann der Fall ist, wenn sich alle Einzelkräfte aufheben.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}_\mathrm{S}}{\mathrm{d}t} = 0}$$

Damit der Gesamtimpuls erhalten ist müssen sich lediglich die anliegenden Kräfte aufheben. Dies erlaubt ausdrücklich das Anlegen eines Drehmoments ohne dass sich die Bewegung des Schwerpunkts ändern wird!

1.3 Geschwindigkeit zweier Teilchen im Schwerpunktsystem (SPS)

Wie lässt sich die Geschwindigkeit zweier Teilchen im Schwerpunktsystem darstellen? Aus Abbildung 1 kann die Nomenklatur für die folgende Rechnung entnommen werden.

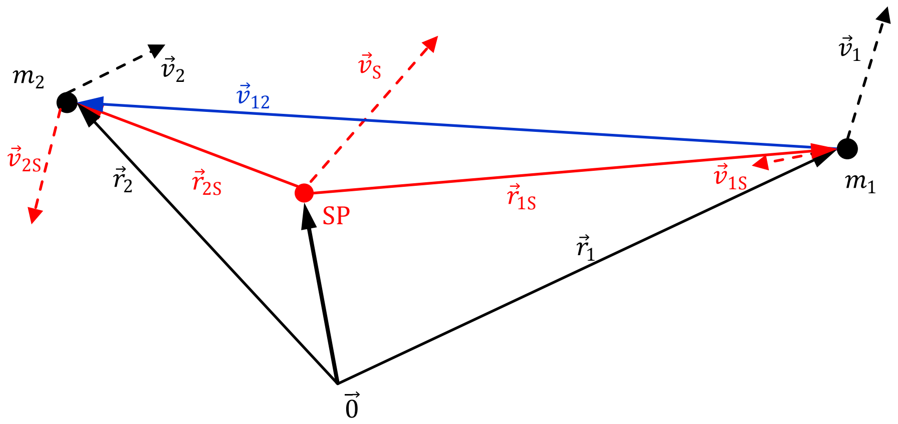


Abbildung 1: Zweiteilchensystem. Vektoren mit einem „S“ im Index beziehen sich auf das Schwerpunktsystem, Größen ohne auf das Laborsystem.

$$\vec{v}_{1S} = \vec{v}_1 - \vec{v}_S = \vec{v_1} - \left(\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_2\vec{v}_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} =$$
$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{12}$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften gilt für die andere Masse

$$\vec{v}_{2S} = \underbrace{-}_{!}\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{12}$$

Die Impulse ergeben sich zu

$$\vec{p}_{1S} = \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{\mu\ \text{"reduzierte Masse"}}\vec{v}_{12} = \mu\vec{v}_{12} \qquad \vec{p}_{2S} = \mu\vec{v}_{21} = -\mu\vec{v}_{12}$$

Die „reduzierte Masse“ wird als Abkürzung eingeführt.

Man erkennt, dass der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem 0 *ist.*

Nun zerlegen wir die Gesamtenergie *„Schwerpunktenergie“* und *Energie bzgl. des Schwerpunkts.*

$$\frac{1}{2}m_1{\vec{v}_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{\vec{v}_2}^2 = \frac{1}{2}m_1(\vec{v}_S + \vec{v}_{1S})^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{v}_S + \vec{v}_{2S})^2 =$$
$$= \frac{1}{2}m_1\left({\vec{v}_S}^2 + \cancel{2\vec{v}_S \cdot \vec{v}_{1S}} + {\vec{v}_{1S}}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left({\vec{v}_S}^2 + \cancel{2\vec{v}_S \cdot \vec{v}_{2S}} + {\vec{v}_{2S}}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2){\vec{v}_S}^2 + \frac{1}{2}\left(m_1{\vec{v}_{1S}}^2 + m_2{\vec{v}_{2S}}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}M{\vec{v}_S}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}{\vec{v}_{12}}^2 + \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2}{\vec{v}_{12}}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}M{\vec{v}_S}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2}{\vec{v}_{12}}^2 = \frac{1}{2}M{\vec{v}_S}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\ \mu{\vec{v}_{12}}^2 = \frac{1}{2}M{\vec{v}_S}^2 + \frac{1}{2}\ \mu{\vec{v}_{12}}^2$$

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2+\frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \underbrace{\frac{1}{2}M\vec{v}_S{}^2}_{\text{Energie im SPS}} + \underbrace{\frac{1}{2}(m_1\vec{v}_{1S}{}^2+m_2\vec{v}_{2S}{}^2)}_{\text{Energie im SPS}} = \underbrace{\frac{1}{2}M\vec{v}_S{}^2}_{\text{Energie im SPS}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu\vec{v}_{12}{}^2}_{\text{Energie im SPS}}$$

2. DYNAMIK STARRER KÖRPER

Von einem starren Körper spricht man, wenn die Massenbeiträge zueinander einen festen Abstand haben, sie sich also relativ zueinander nicht verschieben lassen. Nur der Gesamtkörper kann rotiert oder verschoben werden.

Einen starren Körper kann man sich als ein Vielteilchensystem vorstellen, bei dem die Massen einen festen Relativabstand haben. Eine kontinuierliche Massenverteilung stellt den Grenzfall infinitesimal kleiner Teilmassen dar.

Für einen starren Körper gelten daher die Gesetze des starren Körpers, sie müssen evtl. lediglich auf eine kontinuierliche Massenverteilung erweitert werden. Vorsicht ist beim Stoß mit anderen Körpern geboten, dann muss im Impulserhaltungssatz die ganze Masse des Körpers berücksichtigt werden.

2.1 Schwerpunkt eines Massensystems

Liegt ein starrer Körper vor, der aus einzelnen Punktmassen besteht, kann die Schwerpunktdefinition des Vielteilchensystems (siehe 1.1 Stöße, S. 2) verwendet werden.

Diese Definition wird für infinitesimal kleine Massen auf eine kontinuierliche Massenverteilung erweitert.

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, m(\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})\, \mathrm{d}V$$

Der Schwerpunkt eines starren Körpers ist dem Körper fest zugeordnet, die einzelnen Massen bewegen sich relativ zueinander ja gerade eben nicht. Im Schwerpunktsystem gibt es daher nur Rotation.

Dabei rotiert der Körper um seinen Schwerpunkt. Würde der Körper im Schwerpunktsystem um einen anderen Punkt rotieren, würde auch der Schwerpunkt um diesen rotieren, was jedoch aufgrund seiner Identität mit dem Koordinatenursprung nicht möglich ist.

Bewegung des starren Körpers

Somit kann die Bewegung des Körpers im Laborsystem angegeben werden durch:

$$\vec{v}_i = \underbrace{\vec{v}_S}_{\text{Translation des SP}} + \left(\underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{iS}}_{\text{Rotation um SP}} \right)$$

2.2 Kräftepaare und Drehmoment

Heben sich die anliegenden Kräfte auf, so ist der Gesamtimpuls erhalten (vgl. 1.2 Stöße im Schwerpunktsystem, S. 2 f.).

Beispiel

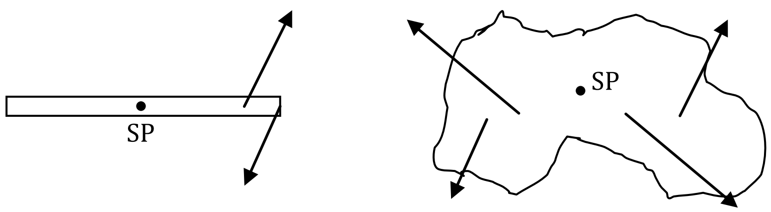


Abbildung 2. Links: Kräfte an einer anfangs ruhenden Stange. Da die Vektorsumme 0 ergibt ist der Gesamtimpuls erhalten. Folglich wird der Schwerpunkt nicht transliert, die Stange rotiert um den Schwerpunkt. Rechts: Kräftepaare an allgemeinem Körper.

Wir wollen diese Überlegungen präzisieren. An einen starren Körper werde an einem Angriffspunkt $\vec{r}$ eine Kraft $\vec{F}$ angelegt. Es soll genau beschrieben werden, wie sich der Körper weiter bewegt.

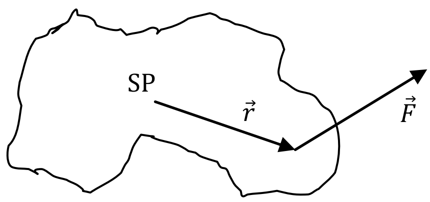
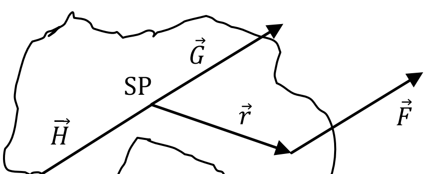


Abbildung 3: Kraft F an Angriffspunkt r.

Dazu legen wir an den Schwerpunkt ein Kräftepaar $\vec{G}$ und $\vec{H}$, dessen Vektorsumme 0 ist.



Nun betrachten wir $\vec{F}$ und $\vec{H}$: Diese Kräfte heben sich bei Vektoraddition auf. Jedoch bewirken sie ein Drehmoment

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{H}}$$

Wirkt das Drehmoment über eine kleine Zeitspanne dt, führt dies einem Drehimpuls $d\vec{L}$ (Rotation um den Schwerpunkt).

Die Kraft $\vec{G}$ bildet kein Drehmoment, da sie im Scherpunkt angreift, allerdings eine Translation des Schwerpunkts.

$$\boxed{M\vec{a}_S = \vec{F}}$$

Der Körper wird also mit $\vec{a}_S = \frac{\vec{F}}{M}$ beschleunigt.

Die Bewegung eines Körpers kann somit aufgeteilt werden in eine Translation des Schwerpunkts und eine Rotation um den Schwerpunkt.

2.3 Drehimpuls und Trägheitsmoment

Den Gesamtdrehimpuls definiert man als Summe aller Drehimpulse des Massensystems vom Laborsystem aus betrachtet.

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times v_i$$

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen dem eben definierten *Gesamtdrehimpuls*, dem *Drehimpuls des Schwerpunktes bzgl. des Ursprungs* und dem *Gesamtdrehimpuls im Schwerpunktsystem* herstellen.

Auf der Grafik ist ein Vielteilchensystem abgebildet. Aus ihr kann man wiederum die Nomenklatur für die folgende Rechnung entnehmen.

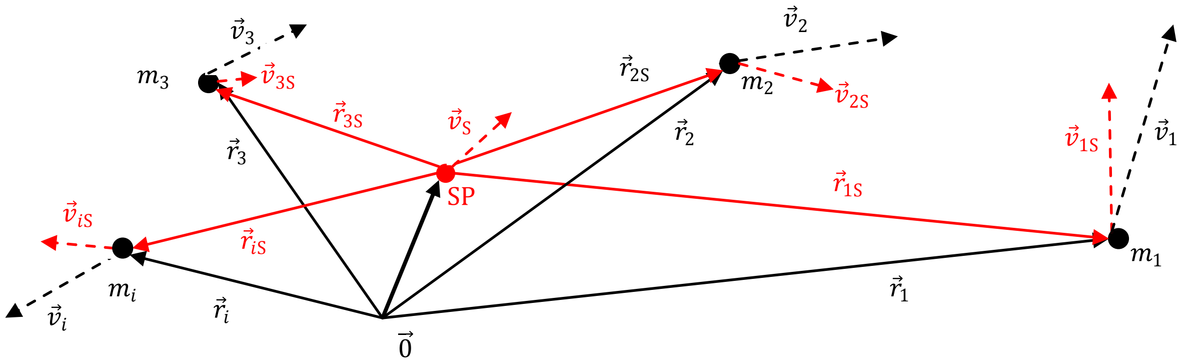


Abbildung 4: Vielteilchensystem. Vektoren mit einem „S“ im Index beziehen sich auf das Schwerpunktsystem, Größen ohne auf das Laborsystem.

Aus der Definition des Schwerpunkts folgt:

$$\sum_i m_i \vec{r}_{iS} = 0$$

ebenfalls ist im Schwerpunktsystem die Summe aller Impulse 0.

$$\sum_i m_i \vec{v}_{iS} = 0$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_S + \vec{r}_{iS}) \times (\vec{v}_S + \vec{v}_{iS}) =$$

$$= \sum_i m_i (\vec{r}_S \times \vec{v}_S + \vec{r}_S \times \vec{v}_{iS} + \vec{r}_{iS} \times \vec{v}_S + \vec{r}_{iS} \times \vec{v}_{iS}) =$$

$$= \sum_i m_i (\vec{r}_S \times \vec{v}_S) + \cancel{\sum_i m_i (\vec{r}_S \times \vec{v}_{iS})} + \cancel{\sum_i m_i (\vec{r}_{iS} \times \vec{v}_S)} + \sum_i m_i (\vec{r}_{iS} \times \vec{v}_{iS}) =$$

$$= \mathrm{M}(\vec{r}_S \times \vec{v}_S) + \sum_i m_i (\vec{r}_{iS} \times \vec{v}_{iS})$$

$$\boxed{\vec{L} = \underbrace{\mathrm{M}(\vec{r}_S \times \vec{v}_S)}_{\vec{L}\text{ des SP bzgl. Ursprung}} + \underbrace{\sum_i m_i (\vec{r}_{iS} \times \vec{v}_{iS})}_{\vec{L}\text{ der MP im SPS}}}$$

Dies gilt für ein System von Massenpunkten. Beim Spezialfall des starren Körpers gilt zusätzlich $\vec{r}_{iS} = \mathrm{const.}$

Ebenfalls anzumerken ist, dass dieser Zusammenhang völlig unabhängig von externen Kräften ist. Die Formel gilt auch, wenn von außen in das System eingegriffen wird, z.B. ein Teilchen auf einer bestimmten Bahn geführt wird.

Wenn durch externe Kräfte eingegriffen wird gelten jedoch die Erhaltungssätze (Energieerhaltung, Impulserhaltung, Drehimpulserhaltung) nicht mehr.

Definition Trägheitsmoment

Nun führen wir das physikalische Konzept des Drehmoments ein.

Man definiert das Trägheitsmoment bezüglich einer bestimmten Achse als

$$I = \int_V \vec{r}_\perp^{\,2} \rho(\vec{r}) \mathrm{d}V = \int_V \vec{r}_\perp^{\,2} \mathrm{d}m$$

$\vec{r}_\perp$ ist der auf der jeweiligen Achse senkrecht stehende Vektor zum jeweiligen Raumpunkt, über den integriert wird.

Im Allgemeinen ist das Trägheitsmoment von der gewählten Achse abhängig. Unter dem Hauptträgheitsmoment versteht man das Trägheitsmoment bzgl. der Hauptachse des Körpers.

Nun wird ein Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls $\vec{L}$ und dem Trägheitsmoment I bzgl. der Rotationsachse $\vec{\omega}$ hergestellt.

Den Drehimpuls L bzgl. der Rotationsachse kann man sich derart vorstellen: Gedanklich schneide man den Körper senkrecht zur Rotationsachse in infinitesimale Scheiben und bilde für jede Scheibe den Drehimpuls bzgl. der senkrechten Projektion der Massenpunkte auf die Rotationsachse. Diese Drehimpulse werden dann aufsummiert.

Wir definieren den Drehimpuls bzgl. des Vektors $\vec{\omega}$

$$\vec{L} = \int_V \vec{r}_\perp \times \vec{v}\, \rho(\vec{r}) \mathrm{d}V = \int_V \vec{r}_\perp \times \vec{v}\; \mathrm{d}m$$

$\vec{r}_\perp$ ist wieder der auf der $\vec{\omega}$-Achse senkrecht stehende Vektor zum jeweiligen Raumpunkt, über den integriert wird.

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_{\perp i} \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_{\perp i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_{\perp i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp i}) =$$
$$= \sum_i m_i \vec{\omega} (\vec{r}_{\perp i} \cdot \vec{r}_{\perp i}) - \cancel{m_i \vec{r}_{\perp i} (\vec{r}_{\perp i} \cdot \vec{\omega}_i)} = \vec{\omega} \sum_i m_i \vec{r}_{\perp i}^2 = I\vec{\omega}$$

Im Schwerpunktsystem gilt

$$\vec{\mathrm{L}} = \mathrm{I}\vec{\omega}$$

Im Laborsystem gilt

$$\vec{L} = I\vec{\omega} + \vec{R} \times M\vec{v}_S$$

Rotationsenergie

Unter der Rotationsenergie versteht man die kinetische Energie eines Teilchens wenn es um eine festgelegte Achse rotiert. Die Rotationsenergie eines starren Körpers ist dann die Summation über alle infinitesimalen Masseneinheiten.

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1} m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1} m_i (\vec{r}_{i\perp} \omega)^2$$

Der Term kann so umgeformt werden, dass E_{rot} in Abhängigkeit von I dargestellt wird.

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1} m_i (\vec{r}_{i\perp} \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V \vec{r}_\perp{}^2 \rho(\vec{r}) \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \omega^2 I$$

Wichtige Hauptträgheitsmomente

Eine Übersicht oft verwendeter Hauptträgheitsmomente homogener Körper:

	Körper	Trägheitsmoment I
Kugel	Vollkugel, Rotationsachse durch Mittelpunkt	$\frac{2}{5}MR^2$
	Hohlkugel, ($d \ll R$) Rotationsachse durch Mittelpunkt	$\frac{2}{3}MR^2$
Zylinder	Vollzylinder, Rotationsachse gleich Symmetrieachse	$\frac{1}{2}MR^2$
	Hohlzylinder ($d \ll R$), Rotationsachse gleich Symmetrieachse	MR^2
Stab	Rotationsachse durch Schwerpunkt, senkrecht zur Längsachse	$\frac{1}{12}ML^2$
	Rotationsachse durch Endpunkt, senkrecht zur Längsachse	$\frac{1}{3}ML^2$

Eine Kreisscheibe ist aus Trägheitsgesichtspunkten mit dem Vollzylinder, ein entsprechend dünner Ring mit dem Hohlzylinder gleichzusetzen.

Satz von Steiner

Mit dem Satz von Steiner können wir bei bekanntem Trägheitsmoment bzgl. des Schwerpunkts das Trägheitsmoment bzgl. einer beliebigen parallelen Rotationsachse berechnen.

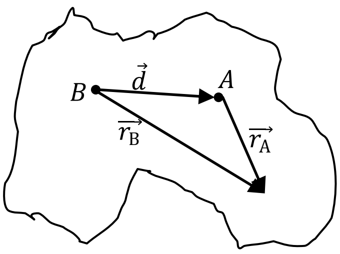


Abbildung 5: Die Achse A steht senkrecht auf der Zeichenebene und läuft durch den Schwerpunkt des Körpers. Achse B verläuft im Abstand $|\vec{d}|$ parallel zu A.

$$I_B = \int_V \vec{r}_B^{\,2} \mathrm{d}m = \int_V \left(\vec{r}_A + \vec{d}\right)^2 \mathrm{d}m = \int_V \vec{r}_A^{\,2} + 2\vec{r}_A\vec{d} + \vec{d}^2 \,\mathrm{d}m = I_A + Md^2 + 2\vec{d}\underbrace{\int_V \vec{r}_A \,\mathrm{d}m}_{0} = I_A + Md^2$$

$$\boxed{I_B = I_A + Md^2}$$

Durch doppelte Anwendung des Satzes von Steiner kann – sofern ein Trägheitsmoment an beliebiger Stelle und der Schwerpunkt bekannt ist – jedes andere Trägheitsmoment paralleler Rotationsachsen berechnet werden.

2.4 Bewegungsgleichungen des starren Körpers bei fester Drehachse

Wirkt tangential zur Drehrichtung die Kraft $\vec{F}_\mathrm{t}$, so liegt folgendes Drehmoment an:

$$\vec{M}_\parallel = \vec{r} \times \vec{F}_\mathrm{t}$$

außerdem gilt:

$$\vec{M}_\parallel = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I\vec{\omega} = I\dot{\vec{\omega}}$$

Vergleich Translation-Rotation

	Translation	Rotation	
$[\mathrm{m}]$	s	φ	$[1]$
$\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$	$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$	$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$	$\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]$
$\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$	$a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$	$\dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$	$\left[\frac{1}{\mathrm{s}^2}\right]$
$[\mathrm{kg}]$	m	I	$[\mathrm{kg\,m}^2]$
$\left[\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}\right]$	$p = mv$	$L = I\omega$	$\left[\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}}\right]$
$\left[\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}\right]$	$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$	$D = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$	$\left[\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2}\right]$
	$E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_\mathrm{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$	
	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$	

Der Vergleich beider Seiten, insbesondere der Einheiten hilft den physikalischen Zusammenhang zu verstehen.

2.5 Rollbewegungen

Die Rollbedingung ist genau dann erfüllt, wenn der Körper nicht rutscht.

$$\boxed{v_\mathrm{S} = \omega R}$$

Wer im Skript einen Fehler findet wird gebeten, ihn mir mitzuteilen.
E-Mail: christoph.buhlheller@ph.tum.de