Übungsaufgaben

1 Mechanik des Massenpunktes

1. Ein Auto fährt mit 100km/h gegen einen Baum. Aus welcher Höhe muss es fallen, um die selbe Geschwindigkeit beim Aufprall zu haben?

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) = 2gh \quad (1)$$

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(100/3.6\ m/s)^2}{2 \cdot 9.81\ m/s^2} \approx 39.3\ m \quad (2)$$

2. Ein Körper der Masse $m = 0.8kg$ wird senkrecht nach oben geworfen. Bei der Höhe $h = 10m$ hat er noch die kinetische von $E_{kin} = 200J$ Welche Maximalhöhe kann der Körper erreichen?

$$E_{kin}(h) + E_{pot}(h) = E_{pot}(h_{max}) \quad (3)$$

$$E_{kin}(h) + mgh = mgh_{max} \quad (4)$$

$$h_{max} = \frac{E_{kin}}{mg} + h = \frac{200\ J}{0.8\ kg \cdot 9.81\ m/s^2} + 10\ m \approx 35.5\ m \quad (5)$$

3. Eine Scheibe der Masse m gleitet reibungsfrei im Kreis mit dem Radius r auf einem Tisch und ist über eine Schnur (durch ein Loch im Tisch) mit einem hängenden Zylinder der Masse M verbunden.

   a) Bei welchem Geschwindigkeitsbetrag der Scheibe bleibt der Zylinder in Ruhe?

   b) Die Scheibe wird nun angehalten und beginnt sofort mit einer beschleunigten Bewegung zum Loch hin. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie sie. Nach welcher Zeit t_0 fällt die Scheibe durch das Loch?

   a) Damit M in Ruhe bleibt, müssen die Fliehkraft von m und die Gewichtskraft von M betragsmäßig gleich sein.

$$m \cdot r \cdot \omega^2 = M \cdot g \quad (6)$$

   Da $\omega = v/r$ folgt also für die Geschwindigkeit v

$$v = \sqrt{\frac{Mgr}{m}} \quad (7)$$

   b) Wir bezeichnen die Gerade, auf der die Scheibe sich bewegt, als x-Achse, das Loch sei bei $x = 0$, die Scheibe starte bei $x_0 = -r$. Es wird die Gesamtmasse $M + m$ beschleunigt, die wirkende Kraft ist $F_G = M \cdot g$. Die Bewegungsgleichung lautet also:

$$(M+m)\ddot{x} = M \cdot g \tag{8}$$

Durch zweifache Integration nach t erhält man

$$x(t) = \frac{Mg}{2(M+m)}t^2 + v_0 t + x_0 \tag{9}$$

$$x(t) = \frac{Mg}{2(M+m)}t^2 - r \tag{10}$$

und mit $x(t_0) = 0$

$$\frac{Mg}{2(M+m)}t_0^2 = r \tag{11}$$

$$\Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2r(M+m)}{Mg}} \tag{12}$$

4. Wie groß ist die Entfernung eines geostationären Satelliten vom Erdmittelpunkt? Welche Energie braucht man bei seinem Start? Wie genau muss sein Abstand vom Erdmittelpunkt eingehalten werden, damit er sich nicht weiter als $0.1\ km/Tag$ von seiner Ursprünglichen Position entfernt?

$$F_z = F_G \tag{13}$$

$$mr\omega^2 = G\frac{Mm}{r^2} \tag{14}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.977 \cdot 10^{24}\ kg}{(2\pi/(24 \cdot 3600\ s))^2}} \tag{15}$$

$$= 4.2252.. \cdot 10^7\ m \approx 42252\ km \tag{16}$$

Für die beim Start benötigte Energie gilt:

$$\Delta E = E_{pot,\ Orbit} - E_{pot,\ Erde} + E_{kin,\ Orbit} - E_{kin,\ Erde} \tag{17}$$

$$= \int_{R_E}^{R_O} F_g\ dr + \frac{1}{2}m(v_O^2 - v_E^2) \tag{18}$$

$$= \int_{R_E}^{R_O} G\frac{Mm}{r^2}\ dr + \frac{1}{2}m\omega^2(R_O^2 - R_E^2) \tag{19}$$

$$= GMm(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_O}) + \frac{1}{2}m\omega^2(R_O^2 - R_E^2) \tag{20}$$

$$= GMm(\frac{R_0 - R_E}{R_O R_E}) + \frac{1}{2}m\omega^2(R_O^2 - R_E^2) \tag{21}$$

Für die neue Winkelgeschwindigkeit gilt: $\omega = \omega_0 \pm \omega_A$ mit ω_0 der Geschwindigkeit für die exakte Position und ω_A der Geschwindigkeit der Abweichung. Für die Geschwindigkeit der Abweichung gilt Näherungsweise $\omega_A = \frac{v_A}{r} \approx \frac{v_A}{R_0} = 100\ \frac{m}{Tag}/R_0$. Mit Gleichung 15 gilt:

$$r_{1,2} = \sqrt[3]{\frac{GM}{(\omega_0 \pm v_A/R_0)^2}} \tag{22}$$

$$r_0 = 4.22518506 \cdot 10^7\ m \quad r_1 = 4.22518400 \cdot 10^7\ m \quad r_2 = 4.22518612 \cdot 10^7\ m \tag{23}$$

$$r_0 - r_1 \approx 10.6\ m \quad r_2 - r_0 \approx 10.6\ m \tag{24}$$

5. Zwei Kugeln aus Blei mit den Massen $m_1 = m_2 = 90\ kg$ hängen in einem Schacht an zwei dünnen drähten der Länge $L = 100m$, deren gleich hohe Aufhängepunkte den Abstand $d = 0.2\ m$ haben. Wie weit sind die Mittelpunkte der beiden Kugeln von einander Entfernt, wenn man das Gravitationsfeld der Erde als Kugelsymmetrisch annimmt.

   a) Wenn man die gegenseitige Anziehung der Kugeln vernachlässigt? Wir gehen von der Länge des jeweiligen Kreisbogens aus, der so entstehende Fehler ist Aufgrund $d \ll R$ vernachlässigbar:

$$d = \phi \cdot R \tag{25}$$

$$s = \phi \cdot (R - L) \tag{26}$$

$$\frac{d}{R} = \frac{s}{R - L} \tag{27}$$

$$s = d\left(1 - \frac{L}{R}\right) = 0.2\ m\left(1 - \frac{100\ m}{6378.163 \cdot 10^3\ m}\right) = 19.99\ldots m \tag{28}$$

$$d - s = 3.135\ldots \mu m \tag{29}$$

   b) Mit gegenseitiger Anziehung?

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{F_{GK}}{F_{GE}} = \frac{G\frac{m^2}{r^2}}{mg} = \frac{Gm}{gr^2} \overset{r \approx d}{=} \frac{Gm}{gd^2} \tag{30}$$

$$\alpha \approx \sin\alpha = \frac{s}{L} \tag{31}$$

$$\Delta s = 2L\frac{Gm}{gd^2} = 100\ m\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 90\ kg}{9.81\frac{m}{s^2} \cdot (0.2\ m)^2} \tag{32}$$

$$= 3.061\ldots \mu m \tag{33}$$

   Der Abstand ist also der Abstand im Fall ohne gegenseitige Anziehung minus $3\mu m$.

6. Eine Masse M gleitet ohne zu rollen im Schwerefeld der Erde ($g = 9,81\frac{m}{s^2}$) aus der Ruhelage reibungsfrei eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 30°$ hinab, wird umgelenkt und springt zur Zeit $t = 0$ unter dem Winkel α von einer Sprungschanze. Sie landet schließlich bei $d = 120m$ (Abstand Sprungschanze Auftreffpunkt). Das Ende der Sprungschanze befindet sich $h_2 = 10m$ uber dem Boden. Der "Tiefpunkt" (kurz vor der Schanze) ist $h_1 = 2m$ unterhalb des Endes der Schanze.

   a) Berechnen Sie die kinetische Energie der Masse am Schanzentisch in Abhängigkeit von der Höhe h des Startpunkts S.

$$E_{pot,\ start} = E_{pot,\ schanze} + E_{kin,\ schanze} \tag{34}$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - h_2) \tag{35}$$
$$v = \sqrt{2g(h - h_2)} \tag{36}$$

   b) Beschreiben Sie die Bewegungen in x- und y-Richtung der Masse ab dem Zeitpunkt des Verlassen des Schanzentisches als Funktion der Zeit t.

$$x(t) = v_s \cdot (\cos\alpha)t \tag{37}$$
$$y(t) = v_s \cdot (\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + h_2 \tag{38}$$

   c) Von welcher Höhe h muss die Masse M starten, damit sie bei $d = 120m$ auftrifft?

$$y(t) \stackrel{!}{=} 0 \tag{39}$$
$$x(t) \stackrel{!}{=} d \tag{40}$$

Mit Gleichungen 37 und 38 folgt:

$$t = \frac{d}{v_s \cos\alpha} \tag{41}$$
$$0 = v_s \sin\alpha \cdot t + h_2 - \frac{1}{2}gt^2 = d\tan\alpha + h_2 - \frac{1}{2}g\frac{d^2}{v_s^2\cos^2\alpha} \tag{42}$$

Einsetzen von Gleichung 36 gibt:

$$0 = d\tan\alpha + h_2 - \frac{1}{4}\frac{d^2}{(h - h_2)\cos^2\alpha} \tag{43}$$
$$h = \frac{1}{4}\frac{d^2}{\cos^2\alpha(d\tan\alpha + h_2)} + h_2 \tag{44}$$
$$\approx 70,54\ m \tag{45}$$

d) Unter welchem Winkel β trifft die Masse auf? Welche Absolutgeschwindigkeit besitzt sie dabei?

$$v_x = v_s \cos\alpha \tag{46}$$
$$v_y = v_s \sin\alpha - \frac{1}{2}gt \tag{47}$$

Mit Gleichung 41 folgt:

$$v_y = v_s \sin\alpha - \frac{1}{2}g\frac{d}{v_s\cos\alpha} \tag{48}$$
$$\tan\beta = \frac{v_y}{v_x} \tag{49}$$
$$\Rightarrow \beta \approx -4,77^\circ \tag{50}$$

e) An welchem Punkt/welchen Punkten der gesamten Bahn ist die Geschwindigkeits- komponente in x-Richtung am größten? (keine Rechnung)

Die Geschwindigkeit in x-Richtung ist am Umkehrpunkt der Sprungschanze am größten, da dort die gesamte kinetische Energie in x-Richtung zeigt.

7. Eine Stählerne Spiralfeder der Länge $l = 0.8m$ wird unter Einwirkung der Kraft $F_1 = 20N$ um die Länge $x_1 = 0.05m$ gedehnt. Welche Arbeit wird bei der Dehnung der Feder auf das Zweifache ihrer Ursprünglichen länge benötigt?

$$F = Dx \tag{51}$$
$$D = \frac{F}{x} = \frac{20\ N}{0.05\ m} \tag{52}$$
$$W = \int_0^l Dx = \frac{1}{2}Dl^2 = \frac{1}{2}\frac{20\ N}{0.05\ m}(0.8\ m)^2 = 128\ Nm \tag{53}$$

8. Wie groß muß die Treibstoffmasse einer einstufigen Rakete sein, um eine Nutzlast von 500kg bei waagrechtem Abschuß am Äquator

   a) in Ostrichtung
   b) in Westrichtung

   bis auf die erste kosmische Fluchtgeschwindigkeit $v_1 = 7.9\frac{km}{s}$ zu beschleunigen wenn die Ausströmgeschwindigkeit des Treibstoffgases relativ zur Rakete $v_e = 4.5km/s$ ist. Gehen sie davon aus, dass die zur Beschleunigung benötigte Zeit $t \ll 47s$ ist.

Für die Geschwindigkeit, die die Rakete aufgrund der Erddrehung innehat gilt:

$$v_0 = \pm\omega R = \pm\frac{2\pi}{24 \cdot 3600\ s} \cdot 6378 \cdot 10^3\ m \tag{54}$$

Nach der Raketengleichung gilt für die Endgeschwindigkeit

$$v = v_0 - gt + v_e \ln\frac{m_A}{m_E} \approx v_0 + v_e \ln\frac{m_A}{m_E} \tag{55}$$

$$m_A = m_E \cdot e^{\frac{v-v_0}{v_e}} \tag{56}$$

$$m_T = m_N(e^{\frac{v-v_0}{v_e}} - 1) \tag{57}$$

Die letzte Zeile folgt, da $m_A = m_N + m_T$ und $m_E = m_N$. Einsetzen der Werte ergibt

$$m_{T,Ost} = 3207\ kg \tag{58}$$

$$m_{T,West} = 2610\ kg \tag{59}$$

9. a) Ein Körper bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = 3\frac{rad}{s}$ auf einem Kreis in der x-z-Ebene mit dem Radius $R = 1$ im Schwerefeld der Erde mit $\overrightarrow{g} = (0,\ 0,\ -g)$. Wie groß ist seine Beschleunigung an der höchsten und Tiefsten Stelle der Kreisbahn? Wie groß ist der Unterschied zwischen beiden Werten?

$$a = \pm a_z - g = \pm\omega^2 R - g \tag{60}$$

$$\Delta a = 2\omega^2 R \tag{61}$$

b) Ein Körper startet mit $v = 0$ auf der Höhe h auf einer Looping Bahn (Schiefe Ebene die am tiefsten Punkt in einen Looping mit dem Radius R übergeht). Wie groß sind Geschwindigkeit und Beschleunigung beim Eintritt und an der höchsten Stelle des Loopings? Wie groß darf das Verhältnis von Starthöhe zu Loopingdurchmesser $\frac{h}{R}$ maximal sein, damit der Körper nicht aus dam Looping fällt? Was ist dann die mindestgeschwindigkeit am Scheitel des Looping?

$$v_E = \sqrt{2gh} \quad a_E = -\omega_E^2 R - g = \frac{v_E^2}{R} - g \tag{62}$$

$$v_S = \sqrt{2g(h-2R)} \quad a_S = \begin{cases} -g \text{ für } g > \omega_S^2 R \\ \omega_S^2 R \text{ sonst} \end{cases} \tag{63}$$

Damit die Masse nicht aus dem Looping fällt muss die Zentripetalbeschleunigung mindestens genauso groß sein wie die Beschleunigung aufgrund der Gravitation.

$$\omega_S^2 R = g = \frac{v_S^2}{R} \tag{64}$$
$$v_S = \sqrt{Rg} = \sqrt{2g(h-2R)} \tag{65}$$
$$\frac{h}{R} \geq \frac{5}{2} \tag{66}$$

10. Ein PKW fährt auf einer Bundesstraße mit konstantem Sicherheitsabstand von $s = 40\ m$ hinter einem LKW (Länge $l = 25\ m$) mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 80\ km/h$ hinterher. Als der Fahrer eine $d = 300\ m$ lange freie Strecke einsehen kann, setzt er zum Überholen an. Dabei beschleunigt er mit $a = 1.3 \frac{m}{s^2}$ bis auf $v_P = 100 km/h$. Schafft er das Überholen gefahrlos? Wie lange sind Überholzeit und Überholweg, wenn beim Wiedereinscheren der Sicherheitsabstand von $s = 40\ m$ beachtet wird? Zeichnen sie das s(t) und v(t) Diagramm.

    Wir Stellen zunächst die Geschwindigkeit und den Ort von LKW und PKW als Funktion der Zeit auf. Da wir die Länge des PKW nicht kennen gehen wir von einem Punktförmigen PKW aus. Für den Orte des PKW nehmen wir die vordere Stoßstange her:

$$v_P = v_0 + a t_B \tag{67}$$
$$x_P = v_0 t_B + \frac{1}{2} a t_B^2 + v_P t_R \tag{68}$$
$$x_L = v_0 (t_B + t_R) + s + l \tag{69}$$
$$\tag{70}$$

    Über die Geschindigkeitsbeziehung in Gleichung 67 kommen wir an die Beschleunigungszeit t_B und setzen diese in 68 ein:

$$x_P = v_0 \frac{v_P - v_0}{a} + \frac{1}{2} \frac{(v_P - v_0)^2}{a} + v_P t_R \tag{71}$$
$$t_R = \frac{d - v_0 \frac{v_P - v_0}{a} - \frac{1}{2} \frac{(v_P - v_0)^2}{a}}{v_P} \tag{72}$$
$$\tag{73}$$

    Damit berechnen wir, wie weit der LKW während des Überholvorganges gefahren ist. Ist der Ort um wenigstens 40 Meter kürzer als 300 Meter so ist der Überholvorgang sicher. $t_B \approx 4.3\ s$, $t_R \approx 7.0\ s$. In dieser Zeit ist die Stange des LKW bereits bei $x_L \approx 314\ m$. Der Überholvorgang ist also nicht sicher. Für die länge des Überholvorganges mit sicherem

Einscheren setzen wir an:

$$x_P = x_L + s \tag{74}$$

$$v_0 t_B + \frac{1}{2} a t_B^2 + v_P t_R = v_0(t_B + t_R) + 2s + l \tag{75}$$

$$t_R = \frac{-\frac{1}{2}\frac{(v_P - v_0)^2}{a} + 2s + l}{v_P - v_0} = 16.76\ldots\ s \approx 16.8\ s \tag{76}$$

$$t = t_B + t_R \approx 21.0\ s \tag{77}$$

Den Überholweg erhält man durch:

$$x = x_L + s = v_0(t_B + t_R) + 2s + l = 572.48\ldots\ m \approx 572\ m \tag{78}$$

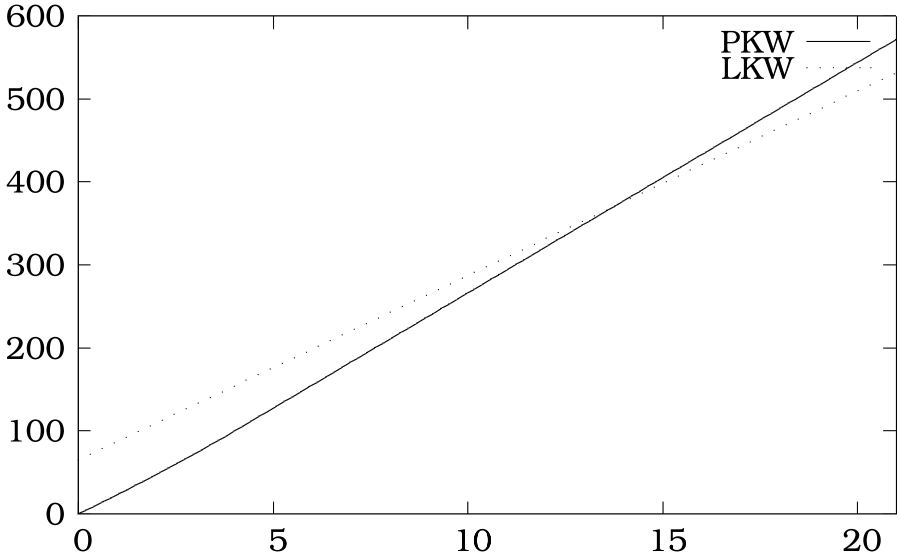


Abbildung 1: Ort in Abhängigkeit von der Zeit

11. Sie besitzen ein Gewehr, aus dem die Kugeln mit einer Geschwindigkeit von $v = 1000 m/s$ austreten. Sie wollen damit ein Ziel in einer Entfernung von $d = 2km$ treffen. Um welchem Winkel müssen Sie das Gewehr relativ zur Horizontalen neigen? (keine Reibung, keine Erdkrümmung)

    Wir verwenden die Formel die uns die Höhe in Abhängigkeit vom Ort

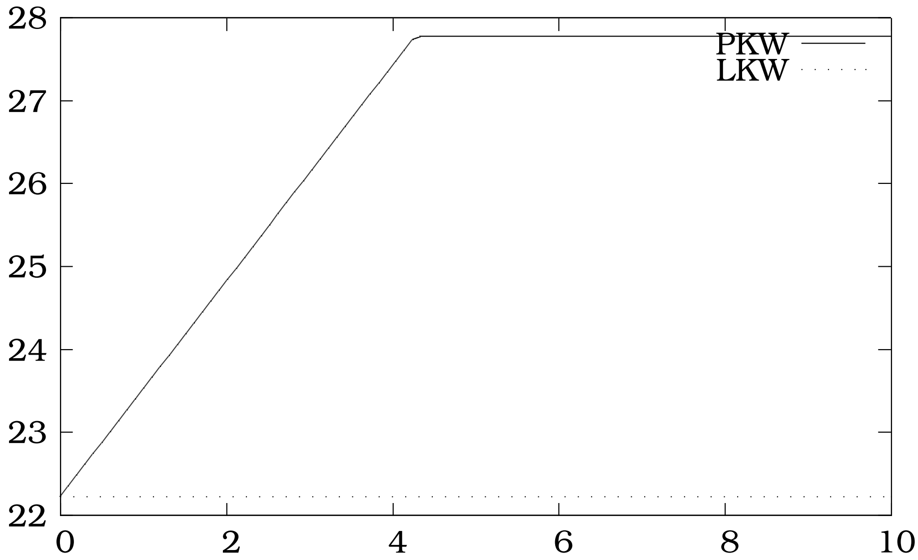


Abbildung 2: Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit

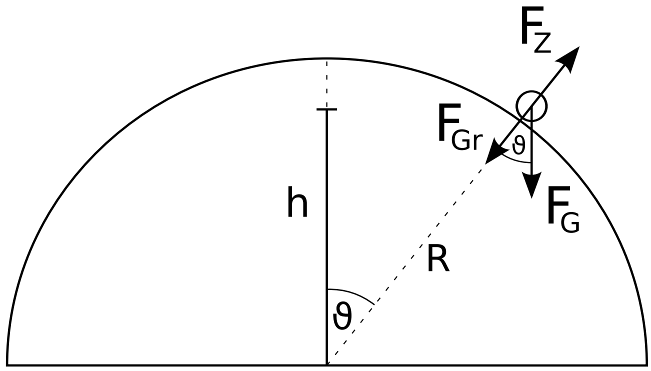
gibt. Setzen $z_0 = 0$, $z(x) = 0$, $x = d$

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{gd^2}{v_{0x}^2} + \frac{v_{0z}}{0x}d \tag{79}$$

$$\frac{1}{2}gd = v_{0z}v_{0x} = v^2 \sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}v^2 \sin 2\phi \tag{80}$$

$$\phi = \frac{1}{2}\arcsin\frac{gd}{v^2} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{9.81\ m/s^2 \cdot 2000\ m}{(1000\ m/s)^2} = 0.562\ldots\ ^\circ \approx 0.56\ ^\circ \tag{81}$$

12. Ein Teilchen der Masse m liegt auf dem Nordpol einer reibungslos glatten Halbkugel mit dem Radius $R = 4$ m. Das Teilchen gleite an der Oberfläche der Halbkugel hinab.
    a) Wie groß ist die Geschwindigkeit v_L des Teilchens, wenn es sich von der Oberfläche der Kugel löst?
    b) In welcher Höhe h löst sich das Teilchen von der Oberfläche der Kugel?



a) Die Kugel wird vom radialen Anteil F_{Gr} der Gewichtskraft F_G an die Halbkugel gedrückt, die Fliehkraft F_Z wirkt nach außen. Es gilt

$$F_{Gr} = -m \cdot g \cdot \cos\vartheta \qquad F_Z = m \cdot R \cdot \omega^2 = m\frac{v^2}{R} \tag{82}$$

Damit die Kugel nicht mehr an die Halbkugel gedrückt wird müssen beide Kräfte betragsmäßig gleich sein:

$$mg\cos\vartheta = m\frac{v^2}{R} \qquad \Rightarrow v^2 = Rg\cos\vartheta \tag{83}$$

Wenn sich die Kugel auf der Höhe h befindet, hat sie bereits $\Delta E_{pot} = mg(R-h) = mgR(1-\cos\vartheta)$ an potentieller Energie in kinetische Energie umgewandelt. Es muss also gelten

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \cos\vartheta) \tag{84}$$

$$\Rightarrow \cos\vartheta = 1 - \frac{v^2}{2gR} \tag{85}$$

Setzt man dieses Ergebnis nun in (83) ein erhält man:

$$v^2 = Rg - \frac{v^2}{2} \tag{86}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{3}Rg} \tag{87}$$

b) Nun lässt sich mit dem Ergebnis für v und (83) ein Wert für $\cos\vartheta$ ermitteln und damit h berechnen:

$$h = R\cos\vartheta = \frac{2}{3}R \tag{88}$$

2 Bewegte Bezugssysteme und Spezielle Relativitätstheorie

1. Eine Bleikugel fällt vertikal von einem 110m hohen Turm in München (48° nördliche Breite) herab. Wie weit wird die Kugel bei ihrem Fall zu Boden von der Corioliskraft abgelenkt? Corioliskraft: $\vec{F_C} = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$ bzw betragsmäßig $F_C = 2m\omega v_\perp$, wobei $v_\perp$ die Bewegung senkrecht zur Rotationsachse bezeichnet. Für eine radiale Bewegung bei $\vartheta = 49^\circ$ nördl. Breite ist

$$v_\perp = \cos(\vartheta)v \tag{89}$$

Es zeige die z-Achse radial nach außen, die x-Achse zeige in Richtung der Ablenkung (nach Osten). Für die Bewegung in z-Richtung gilt dann

$$\ddot{z} = -g \qquad \Rightarrow v_z(t) = -g \cdot t, \qquad z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{90}$$

Aus $z(t_0) = 0$ folgt eine Fallzeit von $t_0 = \sqrt{2h/g}$.

Für die Bewegung in x-Richtung gilt:

$$m\ddot{x} = F_C = 2\omega m \cos(\vartheta)v_z \tag{91}$$
$$\Rightarrow \ddot{x} = 2\omega \cos(\vartheta)gt \tag{92}$$
$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{3}\omega \cos(\vartheta)gt^3 \tag{93}$$

Für die Ablenkung $L = x(t_0)$ gilt dann

$$L = \frac{1}{3}\omega \cos(\vartheta)g \left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3 \tag{94}$$
$$= \frac{2}{3}\omega \cos(\vartheta)h\sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{95}$$

Mit $\omega = 2\pi/$(24 h), $\vartheta = 49^\circ$ und $h = 110$ m erhält man

$$L \approx 16{,}6\text{mm} \tag{96}$$

Bemerkung:

Die Kugel erfährt außerdem eine Ablenkung durch die Zentrifugalkraft (Richtung Süden), sie beträgt

$$y(t_0) \approx -\sin(\vartheta)R_E \cos(\vartheta)\omega^2 \frac{t^2}{2} \tag{97}$$
$$\approx -187\text{mm} \tag{98}$$

und ist somit (bei 49°) wesentlich größer als die Ablenkung durch die Corioliskraft.

2. Ein Käfer krabble auf einem Karusell ohne zu rutschen aus seiner Sicht gesehen in Bezug auf die Scheibe radial von der Mitte nach außen. Bestimmen Sie alle auf den Käfer wirkenden Kräfte aus der Sicht des Käfers und aus der Sicht eines Beobachters der neben dem Karusell steht.

   Sicht des Käfers:

$$F_Z = m\omega^2 r\hat{e}_r \tag{99}$$
$$F_C = -2mv_0\omega\hat{e}_\phi \tag{100}$$

   Von außen sieht die Situation anders aus. Der Ort, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Käfers sind gegeben als:

$$\overrightarrow{r}(t) = v_0 \cdot t \cdot \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} \tag{101}$$
$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{r}(t) = v_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} + v_0 \cdot \omega t \cdot \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix} \tag{102}$$
$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{v}(t) = 2v_0\omega \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix} - v_0\omega^2 t \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} \tag{103}$$
$$= 2v_0\omega\hat{e}_\phi - r\omega^2\hat{e}_r \tag{104}$$

   Die Kraft ergibt sich dann als $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$

3. a) Welche Gewichtskraft ergibt sich für einen ruhenden Menschen ($m = 60$kg)
      i. am Nordpol?
      ii. am Äquator?

      Die Erde werde als perfekte Kugel mit Radius $R = 6378$km, die Fallbeschleunigung überall mit $g = 9,81$m/s^2 angenommen.
      i. Gewichtskraft am Nordpol: $F_G = m \cdot g = 588,6$ N.
      ii. Am Äquator wird die Gewichtskraft durch die Zentrifugalkraft reduziert: $F_A = m \cdot g - mR\omega^2 = 586,6$ N.

   b) Wie ändert sich die Gewichtskraft, wenn der Mensch am Äquator in einem Flugzeug mit $v = 800$km/h
      i. nach Osten
      ii. nach Norden

      fliegt?
      i. Bei einer Bewegung nach Osten zeigt die Corioliskraft nach der Dreifingerregel von der Erde weg, die Gewichtskraft wird also nochmals reduziert. Es gilt: $F = F_A - 2m\omega v = 584,6$ N.
      ii. Bei einem Flug nach Norden findet die Bewegung parallel zur Drehachse statt, es wirkt daher keine Corioliskraft. Es gilt $F = F_A$.

4. Eine Kugel hängt an einem $l = 10\ m$ langen Faden und rotiert um die vertikale Achse durch den Aufhängepunkt mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi \cdot 0.2s^{-1}$. Wie groß ist der Winkel, den der Faden mit der Vertikalen bildet, und wie groß ist die Geschwindigkeit v der Kugel?

$$F_Z = m\omega^2 r \qquad r = \sin\alpha l F_G \qquad = mg \tag{105}$$

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{\omega^2 l \sin\alpha l}{g} \tag{106}$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 l}{g} \tag{107}$$

$$\alpha = \arccos\frac{g}{\omega^2 l} =\approx 51.6^\circ \tag{108}$$

$$v = \omega r \approx 9.85\ \frac{m}{s} \tag{109}$$

5. Ein Zug (Masse $3.0 \cdot 10^6 kg$) fahre mit einer Geschwindigkeit von $v = 100km/h$ von Nord nach Süd über den 48. Breitengrad. Wie groß ist die Corioliskraft auf die Schienen? In welche Richtung zeigt sie?

   Für den Zug ist es so, als würde sich die Erde nur mit $\omega_Z = \omega\sin\phi$ drehen. Die Corioliskraft ist dann $F_C = 2mv_0\omega_Z = 2mv_0\omega\sin\phi = 9.00\ldots\cdot 10^3\ N$. Sie zeigt nach Westen. (Dreifinger Regel, Aufstellen der Corioliskraft als Vektor)

6. Es sind die Folgenden Ereignisse gegeben: $E_1 = (1,5)$ und $E_2 = (3,9)$. Mit welcher Geschwindigkeit muss sich ein Bezugssystem an ihnen vorbeibewegen, damit in ihm die beiden Ereignisse gleichzeitig stattfinden?

   Damit die beiden Ereignisse gleichzeitig stattfinden muss gelten:

$$t_1' = t_2' \tag{110}$$

$$t_1 - \frac{vx_1}{c^2} = t_2 - \frac{vx_2}{c^2} \tag{111}$$

$$v = \frac{(t_1 - t_2)\cdot c^2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}c \tag{112}$$

7. Zwei Raumschiffe A und B starten zur gleichen Zeit auf der Erde und fliegen in entgegengesetzter Richtung mit gleicher Geschwindigkeit v zu Punkten in der gleichen Entfernung L. Sobald die Raumschiffe ihre jeweiligen Zielpunkte erreicht haben, senden sie ein Funksignal zu Erde, das dort zur Zeit T nach dem Start der Raumschiffe empfangen wird.

   a) Zeigen Sie, dass folgender Zusammenhang gilt

$$\frac{v}{c} = \left(\frac{cT}{L} - 1\right)^{-1}$$

b) Berechnen Sie für $L = 1$ Lichttag und $T = 8/3$ Tage mit Hilfe der Lorentz-Transformation die Ankunftszeiten der beiden Raumschiffe an ihren Zielpunkten betrachtet vom Inertialsystem von A.

Vernachlässigen Sie die Effekte der Beschleunigung der Raumschiffe.

a) Das Raumschiff gewegt sich mit Geschwindigkeit v, es erreicht den Zielpunkt also zur Zeit $t_0 = L/v$ und sendet dann sein Signal aus. Dieses bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit und braucht für die Strecke also die Zeit $t_1 = L/c$. Somit gilt

$$T = L\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{c}\right) \tag{113}$$

Auflösen nach v ergibt

$$v = \frac{1}{\frac{T}{L} - \frac{1}{c}} = c \cdot \left(\frac{cT}{L} - 1\right)^{-1} \tag{114}$$

Daraus folgt die Behauptung.

b) Beide Ereignisse finden im Bezugssystem der Erde zum gleichen Zeitpunkte statt:

$$t = \frac{L}{v} = \frac{5}{3}\mathrm{d} \tag{115}$$

Mit dem Ergebnis aus (a) folgt:

$$\beta = \frac{v}{c} = \left(\frac{8/3\mathrm{d} \cdot c}{1c\mathrm{d}} - 1\right)^{-1} = \frac{3}{5} \tag{116}$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \frac{5}{4} \tag{117}$$

Die Lorentz-Transformation der Zeit lautet

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \tag{118}$$

OBdA bewege sich Raumschiff A in positive x-Richtung. Da in das Bezugssystem von Raumschiff A transformiert werden soll, ist $\beta = v_A/c = +5/3$. Die beiden Raumschiffe befinden sich an den Positionen $x_A = L$ und $x_B = -L$. Es folgt

$$t'_A = \gamma\left(t - \frac{\beta L}{c}\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{5}{3}\mathrm{d} - \frac{3}{5}\mathrm{d}\right) = \frac{4}{5}\mathrm{d} \tag{119}$$

und für Raumschiff B

$$t'_B = \gamma\left(t + \frac{\beta L}{c}\right) = \frac{17}{16}\mathrm{d}. \tag{120}$$

8. Ein Raumschiff bewegt sich mit einer relativistischen Geschwindigkeit von $v = 0,9c$ von der Erde weg. Als sich das Raumschiff anschickt bei einer Distanz von $x_s = 6,0 \cdot 10^9$ km zur Erde (von der Erde aus gesehen) das Sonnensystem zu verlassen, wird zur Zeit $t_0 = t'_0 = 0$ ein Radiosignal von der Erde an das Raumschiff ausgesandt. Wie lange dauert es, bis das Signal das Raumschiff erreicht hat,
   a) gemessen im Bezugssystem S der Erde?
   b) gemessen im Bezugssystem S' des Raumschiffs?
   c) Geben sie die Position des Raumschiffs in beiden Bezugssystemen zum Zeitpunkt des Signalempfanges an.

   a) Die Ortsfunktion des Lichtes lautet $x_L(t) = ct$, die des Raumschiffs $x_R(t) = \beta ct + x_S$. Das Signal erreicht das Raumschiff also zum Zeitpunkt t_0 mit

$$ct_0 = \beta ct_0 + x_S \tag{121}$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{x_S}{c(1-\beta)} = 2,32\mathrm{d} \tag{122}$$

   b) Mit der Lorentz-Transformation

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \tag{123}$$

   wollen wir t_0 ins Bezugssystem des Raumschiffs transformieren. Es gilt $x = x_R(t_0)$ und $t = t_0$

$$ct'_0 = \gamma\left(ct_0 - \beta\left(\frac{\beta x_S}{1-\beta} + x_S\right)\right) \tag{124}$$

$$= \gamma\left(\frac{x_S}{1-\beta} - \frac{\beta x_S}{1-\beta}\right) \tag{125}$$

$$\Rightarrow t'_0 = \gamma\frac{x_S}{c} = 0,53\mathrm{d} \tag{126}$$

   c) Für die Position des Raumschiffs in S gilt

$$x_0 = x_R(t_0) = \frac{x_S}{1-\beta} = 6 \cdot 10^{10}\mathrm{km} \tag{127}$$

$$\tag{128}$$

   In seinem eigenen Bezugssystem S' hat das Raumschiff natürlich die Position

$$x'_0 = 0 \tag{129}$$

   Für den Abstand zur Erde in S' gilt (nicht gefragt)

$$L' = x'_0 = c \cdot t'_0 = \gamma x_S = 1,38 \cdot 10^{10}\mathrm{km} \tag{130}$$

9. Ein Astronaut A startet zur Zeit $t = 0$ zu einer Reise zum Sirus (Entfernung 8.1 Lichtjahre) mit der Geschwindigkeit $v_L = 0.8c$. 1 Jahr später startet B mit $v_S = 0.9c$ zum gleichen Ziel. Wann überholt B seinen Kollegen A, gemessen im System von A, B und dem zuhause gebliebenen Kollegen C? Bei welcher Entfernung von C gemessen im System von C geschieht das?

   Wir beginnen mit dem Überholzeitpunkt, respektive dem Überholort in C:

$$x_L = v_L a + v_L t \tag{131}$$

$$x_S = v_S t \tag{132}$$

$$x_L = x_S \tag{133}$$

$$t_U = \frac{v_L a}{v_S - v_L} = 8a \tag{134}$$

$$x_U = v_S t_U = \frac{v_S v_L a}{v_S - v_L} = 7.2\ Lichtjahre \tag{135}$$

$$\tag{136}$$

   Jetzt können wir Überholzeitpunkt und Ort in A (einfach gestrichenes System) bestimmen, in dem wir die Formel für die Zeitdilatation hernehmen. Bewegte Uhren gehen langsamer, also gilt für die Zeiten in t' und t''

$$t' = \frac{t}{\gamma} = 4.8a \tag{137}$$

$$t'' = \frac{t}{\gamma} = 3.5a \tag{138}$$