Skript zum Ferienkurs Experimentalphysik 1

Christoph Buhlheller, Rebecca Saive, David Franke
Florian Hrubesch, Wolfgang Simeth, Wolfhart Feldmeier

4. März 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Klassische Mechanik des Massenpunktes

1.1 Massenpunkt, Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Oft kann man Objekte zur einfacheren physikalischen Betrachtung als Punktförmig annehmen. Die Lage dieses Punktes wird dann mittels $\overrightarrow{r}(t)$ dargestellt:

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeit erhält man durch komponentenweises ableiten dieses Vektors:

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}x(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}y(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

Ebenso verfährt man mit der Beschleunigung $\overrightarrow{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{v}(t)$. Für eindimensionale Probleme (z.B. Freier Fall) kann man auf eine vektorielle Behandlung verzichten und mit Skalaren rechnen $(r(t), v(t), a(t))$.

Um von einer gegebenen Beschleunigung auf die Geschwindigkeit zu kommen integriert man die Beschleunigung in dem gewünschten Zeitintervall:

$$\overrightarrow{v}(t) = \int_{t_{start}}^{t_{stop}} \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int_{t_{start}}^{t_{stop}} a_x(t)dt \\ \int_{t_{start}}^{t_{stop}} a_y(t)dt \\ \int_{t_{start}}^{t_{stop}} a_z(t)dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t_{stop}) - v_x(t_{start}) \\ v_y(t_{stop}) - v_y(t_{start}) \\ v_z(t_{stop}) - v_z(t_{start}) \end{pmatrix}$$

Um den Ort $\overrightarrow{r}(t)$ zu erhalten wendet man dieselbe Vorgehensweise auf die erhaltene Geschwindigkeit an. Wichtig hierbei ist, dass man eine der beiden Grenzen variabel lässt. Sei $t_{start} = 0$ und $t_{stop} = t$. Für die x-Komponente (alle anderen Komponenten sind von der selben Form):

$$v_x(t') - v_x(0) = \int_0^{t'} a_x(t'')dt'' \tag{1}$$

$$x(t) - x(0) = \int_0^{t} v_x(t')dt' \tag{2}$$

Wendet man diese Formeln auf den Fall $a_x = \text{const}$ mit $v_x(0) = v_0$ und $x(0) = x_0$ an erhält man für die x-Komponente:

$$v_x(t') = v_0 + \int_0^{t'} dt'' a_x = v_0 + a \cdot t' \tag{3}$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^{t} dt'(v_0 + a \cdot t') = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2 \tag{4}$$

Löst man 3 nach t' auf und setzt mit $t = t'$ in 4 ein, dann erhält man für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Ort:

$$v_x^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{5}$$

1.2 Freier Fall, schräger Wurf

Mit den Gleichungen 3, 4 und 5 kann man nun den freien Fall sowie den schrägen Wurf behandeln.

Für den freien Fall setzt man z_0 auf die Höhe bei der losgelassen wird. Die Startgeschwindigkeit v_{z0} ist im Augenblick des loslassens Null. Die Beschleunigung a_z entspricht der Erdbeschleunigung.

Für den schrägen Wurf muss man sowohl z als auch x Komponenten betrachten. Es entstehen die folgenden Gleichungen:

$$x(t) = v_{0x}t \tag{6}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z} + z_0 \tag{7}$$

Setzt man 6 nach t Umgeformt in 7 ein erhält man die Höhe in Abhängigkeit von der Entfernung zum Abwurfort:

$$z(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x + z_0 \tag{8}$$

Ableiten und Auflösen nach x, sowie Umschreiben von $v_{0x},\ v_{0z}$ zu $v_{0x} = v_0 \cos\phi$ $v_{0z} = v_0 \sin\phi$ und ersetzen von $\sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}\sin 2\phi$ ergibt für den Ort des Scheitels:

$$x_s = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\phi$$

Für die Wurfweite setzt man Gleichung 8 gleich Null und löst die Quadratische Gleichung. Um den Winkel für maximale Wurfweite zu berechnen schreibt man wie oben $v_{0x},\ v_{0z}$ in Abhängigkeit von $v_0,\ \phi$ und leitet nach ϕ ab. Es ergibt sich:

$$\phi_{max} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2 + 2gh/v_0^2}} \tag{9}$$

1.3 Bewegung mit nicht konstanter Beschleunigung

Der einfachste Fall einer Bewegung mit nicht konstanter Beschleunigung ist eine Punktmasse auf einer Kreisbahn, z.B. ein Stein an einer Schnur der über dem Kopf geschleudert wird. Für die Beschreibung von Kreisbewegung ist es sinnvoll in Polarkoordinaten überzugehen.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos\phi(t) \\ r \cdot \sin\phi(t) \end{pmatrix} \tag{10}$$

Hierbei ist r der konstante Radius und ϕ der Winkel zwischen x-Achse und der Verbindung von Mittelpunkt und Massenpunkt. Die Winkelgeschwindigkeit (Manchmal auch als Kreisfrequenz bezeichnet) ist gegeben als

$$\omega = \dot{\phi} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r} \tag{11}$$

Mit $T = \frac{1}{f}$ der Umlaufdauer und v der tangentialen Geschwindigkeit der Punktmasse. Dabei bleibt $\overrightarrow{v}$ Betraglich konstant, aber die Richtung ändert sich ständig. Für diese Richtungsänderung muss eine Beschleunigung vorhanden sein. Diese Beschleunigung ist die Zentripetalbeschleunigung:

$$a_Z = r \cdot \omega^2 = \frac{v^2}{r} \tag{12}$$

Sie zeigt immer zum Mittelpunkt der Kreisbewegung hin. In vektorieller Schreibweise gelten für Zentripetalbeschleunigung, Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit die folgenden Beziehungen:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r} \tag{13}$$

$$\overrightarrow{\omega} = \frac{1}{r^2} \cdot (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}) \tag{14}$$

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{\omega}) \tag{15}$$

Dabei steht die Winkelgeschwindigkeit $\overrightarrow{\omega}$ immer Senkrecht auf der Bewegungsebene.

Will man eine Beschleunigte Kreisbewegung beschreiben, z.B. das man den Stein immer schneller über dem Kopf rotieren lässt, geht man analog zu der geradlinigen Bewegung vor. Zur Zentripetalbeschleunigung kommt eine Beschleunigung α tangential zur Kreisbahn hinzu. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und der Winkel $\phi(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit sind dann bei konstantem α wie folgt:

$$\omega(t) = \alpha t + \omega_0 \tag{16}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \phi_0 \tag{17}$$

Um den Massenpunkt nachwievor auf der Kreisbahn zu halten muss natürlich die Zentripetalbeschleunigung entsprechend mit größer werden. Tut sie das nicht, verlässt der Massenpunkt die Kreisbahn.

1.4 Kraft

1.4.1 Der Kraftbegriff

Die Zentripetalbeschleunigung bei der Kreisbewegung entsteht nicht von alleine sondern muss irgendwo her kommen. Beim rotierenden Stein über dem Kopf ist das die Kraft die das Seil ausübt. Bei einem Elektron im Magnetfeld die Kräfte die durch das Magnetfeld hervorgerufen werden. Zur Beschreibung des Kraftbegriffs existieren die drei Newtonschen Axiome:

1. Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, solange keine Kraft auf ihn wirkt. Das heißt die Geschwindigkeit $\overrightarrow{v}$ ist konstant und somit auch der Impuls $\overrightarrow{p} = m \cdot \overrightarrow{v}$, solange keine Kräfte auf den Körper wirken oder alle wirkenden Kräfte sich gegenseitig aufheben.

2. Die Kraft wird definiert als die Änderung des Impulses, also $\overrightarrow{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \overrightarrow{p} = m \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \overrightarrow{v} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} m \cdot \overrightarrow{v}$. Bleibt die Masse konstant, so gilt $\overrightarrow{F} = m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \overrightarrow{v} = m \overrightarrow{a}$

3. Die Kräfte zwischen zwei Körpern, die nur miteinander wechselwirken sind entgegengesetz gleich oder: actio = reactio $\rightarrow \overrightarrow{F}_{12} = -\overrightarrow{F}_{21}$. Dabei ist $\overrightarrow{F}_{12}$ die Kraft von Teilchen 1 auf Teilchen 2 und $\overrightarrow{F}_{21}$ die Kraft von Teilchen 2 auf Teilchen 1.

Für Kräfte gilt wie für Orte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen das Superpositionsprinzip. D.h. insbesondere das man die Kraft beliebig in Einzelkomponenten zerlegen und in den einzelnen Vektorkomponenten getrennt behandeln darf.

Man spricht von einem Kraftfeld, wenn jedem Ort $\overrightarrow{r}$ eine Kraft $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r})$ zugeordnet werden kann. Ist dieses Kraftfeld bekannt, so kann man aus $F = m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} v$ folgern:

$$\overrightarrow{v}(t') = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t'} \overrightarrow{F} dt'' + \overrightarrow{v_0} \tag{18}$$

$$\overrightarrow{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{m} \int_{t_0}^{t'} \overrightarrow{F} dt'' + \overrightarrow{v_0} \right) dt' + \overrightarrow{x_0} \tag{19}$$

Das sind im Prinzip die selben Gleichungen wie 1 und 2. Nur dass man hier anstatt der Beschleunigung $\overrightarrow{a}$ die Kraft $\overrightarrow{F} = m \overrightarrow{a}$ einsetzt und dann natürlich durch m teilen muss, damit die Geschwindigkeit und der Ort die Richtige Einheit haben.

1.4.2 Wichtige Kräfte/ Kraftfelder

Die Gravitation für zwei Punktmassen ist gegeben als

$$F = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\hat{r} \tag{20}$$

mit dem radialen Einheitsvektor $\hat{r}$ und der Gravitationskonstanten G. r ist die Entfernung der beiden Punktmassen zueinander. Es kann gezeigt werden, dass die Gravitationskraft einer homogenen Massenverteilung gleich der einer Punktmasse in ihrem Zentrum ist. Befindet man sich ein Stück weit unter der Erde (z.B. Tunnel) so ändert sich der Ausdruck der Gravitationskraft, da die Gravitation einer Kugelschale im inneren Null ist. Die Kraft ist folglich:

$$F = -G\frac{m \cdot m_E}{R_E^3} \cdot \overrightarrow{r} \tag{21}$$

Mit m_E der Erdmasse und dem Erdradius R_E. Die Gravitation ist ein Zentralkraftfeld. Ihre Richtung ist immer Radial und ihre Stärke hängt nur von der Entfernung der beiden Objekte ab.

Die Kraft einer Punktladung ist gegeben als

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{22}$$

Mit den beiden Ladungen Q_1 und Q_2 und der Dielktrizitätskonstanten ϵ_0. Hierbei entsprechen die beiden Ladungen den beiden Massen und $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ der Gravitationskonstanten. Anders als die Gravitation kann hier aber auch eine Abstoßung auftreten. Die elektrische Kraft ist viel Stärker als die Gravitationskraft.

Die Normalkraft ist die Gegenkraft einer Oberfläche, wenn ein Körper mit einer bestimmten Kraft auf diese drückt. Sie steht immer senkrecht auf dieser Oberfläche.

Die Haftreibung ist mit einem Faktor μ_H proportional zur Normalkraft. $F_H = \mu_H \cdot F_N$. Ihre Richtung ist immer der entsprechenden Zugkraft entgegengesetz und genauso groß, damit sich das Objekt nicht bewegt. Ist die Zugkraft größer als die Haftkraft setzt sich das Objekt in Bewegung und es wirkt Gleitreibung.

Die Gleitreibung ist wie die Haftkraft proportional zur Normalkraft und entgegengesetzt der Zugkraft. Der Faktor μ_G ist aber kleiner als μ_H. Sonst wäre keine Bewegung möglich.

μ_G und μ_H sind abhängig von den beiden gleitenden Oberflächen.

1.5 Arbeit und Energie

1.5.1 Arbeit und Leistung

Verschiebt eine Kraft $\overrightarrow{F}$ einen Körper Entlang eines Weges, so leistet sie Arbeit. Die Arbeit ist definiert als das Skalarprodukt der Kraft mit dem Weg $W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{r}$. Will man krummlinige Wege gehen oder ist die Kraft nicht konstant, so muss man über die infinitesimale Arbeit $dW = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$ entlang des Weges γ von A nach B integrieren.

$$W = \int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} \tag{23}$$

Ist das Kraftfeld konservativ, d.h. die zu verrichtende Arbeit um von Punkt A nach Punkt B zu kommen ist unabhängig vom Weg bzw. das Wegintegral über einen geschlossenen Weg verschwindet. In der Mechanik sind prinzipiell alle zeitunabhängigen Kraftfelder konservativ. D.h. wir dürfen uns den Weg selbst aussuchen. Dabei ist es von Vorteil, Wege zu gehen bei denen die Kraft entweder Senkrecht oder Parallel zum Weg steht, da dann über den Betrag der Kraft (Achtung, Vorzeichen müssen nach wie vor beachtet werden) integriert werden kann (parallel) oder die Arbeit ganz verschwindet (senkrecht). Wenn man das Potential kennt, reicht es das vom Potential am Endpunkt das Potential am Anfangspunkt abzuziehen (siehe Abschnitt 1.5.2).

Will man die Arbeit Berechnen, die benötigt wird um einen Stein vom Boden auf die Höhe h zu heben so erhält man:

$$W = \int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_0^h mg\ dz = [mgz]_0^h \tag{24}$$

Die Leistung ist definiert als Arbeit pro Zeit also:

$$P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} W \tag{25}$$

1.5.2 Potentielle Energie

An einem Körper der in einem Kraftfeld verschoben wird, wird Arbeit geleistet. In konservativen Kraftfeldern ist diese Arbeit nicht verloren, sondern steckt in der potentiellen Energie.

$$W = \int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \Delta E_{pot} = E_{pot,start} - E_{pot,stop} \tag{26}$$

In konservativen Kraftfeldern gilt Ebenfalls, dass die Kraft

$$F = -\overrightarrow{\nabla} E \tag{27}$$

ist. Beziehungsweise ist das Kraftfeld konservativ, wenn es ein Potential hat.

In dieser Definition kommen nur Differenzen der potentiellen Energie vor. Ohne Bezugspunkt kann man nicht sagen, wie groß die potentielle Energie tatsächlich ist. Daher legt man sich einen Bezugspunkt fest. Für einen Stein, der von einem Turm der Höhe h_T auf den Boden mit der Höhe h_B fällt ist es sinnvoll die Potentielle Energie auf Höhe des Bodens gleich Null zu setzen.→ $E = mg(h - h_B)$. Am besten rechnet man dann gleich mit $h_D = h_T - h_B$ und erhält $E = mgh_D$.

Will man nun die Arbeit berechnen, die nötig ist um den Stein zu heben genügt es in konservativen Kraftfeldern von der Potentiellen Energie am Endpunkt die Potentielle Energie des Anfangspunktes abzuziehen:

$$W = \int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{h_B}^{h_T} mg\ dz = E_{pot}(h_T) - E_{pot}(h_B) = mg(h_T - h_B) = mgh_D \tag{28}$$

1.5.3 Kinetische Energie

Wird ein Körper von einer Kraft beschleunigt so wird Arbeit an ihm verrichtet. Diese Arbeit befindet sich dann gespeichert in der kinetischen Energie

$$W = \int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = m \int_\gamma \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dr} = m \int_{t_1}^{t_2} v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\ v\ dt = \frac{1}{2} m(v^2(t_2) - v^2(t_1)) \tag{29}$$

Ist die Startgeschwindigkeit Null so erhält man den Bekannten Ausdruck:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} mv^2 \tag{30}$$

1.5.4 Energieerhaltung

In einem nach außen abgeschlossenen System ist die gesamte Energie erhalten (Inklusive Reibungsverlusten). Hat man ein konservatives Kraftfeld (Achtung keine Reibungsverluste!) so bleibt die Summe aus potentieller und kinetischer Energie erhalten.

Allgemein:

$$E_{kin,1} + E_{pot,1} = E_{kin,2} + E_{pot,2} + E_{Reibung} \tag{31}$$

Konservativ

$$E_{kin,1} + E_{pot,1} = E_{kin,2} + E_{pot,2} \tag{32}$$

Oft erhält man über einen Ansatz mit Energieerhaltung einfacher die Bewegungsgleichungen als über einen Kraftansatz.

1.6 Drehimpuls und Drehmoment

Der Drehimpuls einer Masse auf einer beliebigen Bahn ist definiert als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \tag{33}$$

und steht Senkrecht auf $\vec{r}$ und $\vec{v}$. In Polarkoordinaten ist der Betrag des Drehimpulses gleich

$$|L| = mr\dot{\phi} \tag{34}$$

Das Drehmoment ist definiert als die Änderung des Drehimpulses

$$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{L} = \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{r}\right) \times \vec{v}}_{=0} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{p}}_{=\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{35, 36}$$

Ist das Drehmoment also Null bleibt der Drehimpuls erhalten. Dies gilt, wenn die Kraft parallel zum Ortsvektor ist. Also insbesondere in Zentralkraftfeldern wie der Gravitation.

Es ist anzumerken, dass es nicht nur bei Drehbewegungen einen Drehimpuls gibt. So hat ein Teilchen, das an einem Punkt P mit dem minimalen Abstand d und der Geschwindigkeit v vorbeifliegt den Drehimpuls

$$|L| = mvd \tag{37}$$

1.7 Gravitation und Planetenbewegungen

Grundlegend für die Beschreibung der Planetenbewegung sind die drei von Kepler gefundenen Gesetze:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne ruht
2. Die Verbindungslinie zwischen Sonne und Planeten überstreicht in gleicher Zeit, gleiche Flächen
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen: $\frac{T_i^2}{a_i^3} = \text{const}$ für alle Planeten.

Aus den 3 Keplerschen Gesetzen lässt sich die Form der Gravitationskraft bestimmen. Lediglich die Gravitationskonstante G muss durch Messungen bestimmt werden.

$$\vec{F_G} = G\frac{mM}{r^2}\hat{r} \tag{38}$$

Für ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in der Sonne gelegen ergeben sich für den Ort eines Planeten in Polarkoordinaten:

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\phi} \tag{39}$$

$$a = -\frac{-GmM}{2E} \tag{40}$$

$$\epsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2m^3M^2}} E = E_{pot} + E_{kin} \tag{41}$$

Dabei muss man noch zwischen den Einzelnen möglichen Bahnen je nach Gesamtenergie des Systems unterscheiden:

$E < 0$ Ellipse, dies ist die Form, auf der sich die meisten Planeten bewegen.

$E = f$ Parabel, Form eines Kometen, der einmal die Sonne umkreist und dann das Sonnensystem für immer verlässt

$E > 0$ Konnte bisher noch nicht beobachtet werden

2 Bezugssysteme

Die Wahl des Bezugssystems spielt in der Physik eine große Rolle. Je nach Bezugssystem können Rechnungen sehr einfach oder sehr kompliziert werden. Ein mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem ist zum Beispiel das Schwerpunktsystem beim Stoß zweier Teilchen.

2.1 Galilei Transformation

Sei das ungestrichene System das Ruhesystem und das gestrichene System das mit $\overrightarrow{u}$ bewegte System. Dann lauten die Galilei-Transformationen:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r'} + \overrightarrow{u}t \tag{42}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{u} \tag{43}$$

Die Zeit, Beschleunigung und Kraft ist in beiden Systemen die selbe, also kommen auch Beobachter in beiden Systemen auf die selben Physikalischen Gesetze. Die Galilei-Transformationen gelten nur, wenn die Geschwindigkeit zwischen den beiden Systemen viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ($v < 0.1c$) ist. Trifft dies nicht mehr zu, muss man zu den Lorentz-Transformationen greifen.

2.2 Beschleunigte Bezugssysteme, Trägheitskräfte / Scheinkräfte

In Beschleunigten Bezugssystemen (Fahrzeug beim Beschleunigen, Punktmasse auf einer Kreisbahn, ...) herrschen aufgrund der Beschleunigung nicht mehr dieselben Kräfte. Beachtet man die Beschleunigung nicht, so kommt man zu anderen Naturgesetzen. Weiß man jedoch, das sich das System in dem man sich befindet beschleunigt bewegt, so kann man 'Scheinkräfte' einführen um eben diese Beschleunigung zu kompensieren.

2.2.1 Geradlinig beschleunigte Systeme

Das gestrichene System sei das Beschleunigte System mit der konstanten Beschleunigung $\overrightarrow{\alpha}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen die Ursprünge beider Systeme ruhend zusammenfallen. Es ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{a'} \tag{44}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{\alpha} t \tag{45}$$

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x'} + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{46}$$

Anhand von 44 kann man sehen, dass man die Scheinkraft $F = m\alpha$ einführen muss, um auf die selben Gesetzmäßigkeiten zu kommen, wenn man außer acht lässt, das man sich in einem Bewegten Bezugssystem befindet.

Rakete im Gravitationsfeld Für die Beschreibung der Rakete wählen wir das Beschleunigte Bezugssystem, das mit der Rakete mitfliegt. Da sich die Rakete in ihrem eigenen System nicht bewegt muss dort Kräftegleichgewicht zwischen Gewichtskraft, Beschleunigung durch Impulsänderung und der Scheinkraft F_s herschen:

$$0 = F_g + F_b + F_s \tag{47}$$

Für eine einfachere Beschreibung wird $F_g = mg$ gewählt obwohl das streng genommen nur in der Nähe der Erdoberfläche gilt. F_b ist die tatsächlich beschleunigende Kraft. F_s die Scheinkraft die durch das beschleunigte Bezugssystem entsteht. Dabei ist F_b gegeben als die Änderung des Impulses.

$$F_b = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} p = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} m) v_A + m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} v_A = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} m) v_A \tag{48}$$

D.h. wir erhalten für die Beschleunigung aus der Scheinkraft

$$a_s = -g - \frac{\dot{m}}{m} v_A \tag{49}$$

Die tatsächliche Beschleunigung zeigt in die andere Richtung. Integrieren gibt die Geschwindigkeit

$$v = -gt + \ln \frac{m_S}{m_E} v_A + v_0 \tag{50}$$

2.2.2 Rotierende Systeme

Wir betrachten wieder ein gestrichenes und ein ungestrichenes System. Beide Systeme haben den selben Ursprung. Das gestrichene System rotiere mit $\overrightarrow{\omega}$ um seinen Ursprung. Lässt ein Beobachter im gestrichenen System dessen Rotation außer acht, so misst er die Geschwindigkeit $v\overrightarrow{v'}$. Will man diese in eine Geschwindigkeit im ungestrichenen System übersetzen so verwendet man:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r} \tag{51}$$

Dabei ist $\overrightarrow{r}$ der Ort im ungestrichenen System, an dem der Beobachter im gestrichenen System seine Geschwindigkeitsmessung durchgeführt hat.

Will man eine im gestrichenen System gemessene Beschleunigung in das ungestrichene System transformieren, so kommt man auf:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a'} + 2(\overrightarrow{v'} \times \overrightarrow{\omega}) + \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{\omega}) \tag{52}$$

Um auf die selben Gesetzmäßigkeiten zu kommen, muss man also die Corioliskraft

$$\overrightarrow{F_C} = 2m(\overrightarrow{v'} \times \omega) \tag{53}$$

und die Zentrifugalkraft

$$\overrightarrow{F_Z} = m\overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{\omega}) \tag{54}$$

einführen. Dabei verschwindet die Zentrifugalkraft, wenn $\overrightarrow{\omega}$ und $\overrightarrow{r}$ die selbe Richtung haben (z.B. wenn man sich auf den Polen der Erde befindet). Die Corioliskraft verschwindet wenn $\overrightarrow{\omega}$ und $\overrightarrow{v'}$ in die selbe Richtung zeigen (Zug am Äquator, der von Nord nach Süd oder umgekehrt fährt).

Die Corioliskraft lässt sich beeindruckend beim Foucaultsches Pendel beobachten. Die Drehung der Schwingungsebene ist gegeben durch

$$\omega = \omega_s \cdot \sin\phi \tag{55}$$

Wobei ϕ der Winkel zwischen der Ebene durch den Äquator und der Verbindungslinie vom Erdmittelpunkt zu dem Ort an dem man sich befindet ist.

2.3 Lorentz Transformation

Aus der Galilei Transformation folgt, dass die Lichtgeschwindigkeit von bewegten Lichtquellen größer sein muss als die Lichtgeschwindigkeit ruhender Quellen. Aus sehr genauen Messungen weiß man jedoch, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Systemen die Selbe ist. Um diesem experimentellen

Befund Rechnung zu Tragen, muss man die Galilei-Transformationen mit einem Vorfaktor γ versehen und erhält die Lorentz-Transformationen aus dem ruhenden (ungestrichen) in das bewegte System (gestrichen):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{56}$$

$$y' = y \tag{57}$$

$$z' = z \tag{58}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{59}$$

Zu Beachten ist, dass die Transformation nur in der Bewegungsrichtung des ' Systems erfolgt. Alle andere Komponenten werden nicht transformiert. Dabei ist v die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme.

Um eine Rücktransformation aus dem gestrichenen System zu bekommen setzt man das gestrichene System als Ruhesystem von dem sich das ursprüngliche Ruhesystem mit $-v$ wegbewegt und ersetzt alle Terme in den Transformationsgleichungen mit v durch $-v$. Das heißt auch, dass es kein ausgezeichnetes Ruhesystem geben kann. Das hängt immer vom Standpunkt des Beobachters ab.

Um nicht immer die Gleichungen komplett Ausschreiben zu müssen wird folgende Kurznotation verwendet:

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{60}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1 \tag{61}$$

2.4 Spezielle Relativitätstheorie

Wenn man Aufgaben zur Speziellen Relativitätstheorie rechnet, empfiehlt es sich meistens, sich zuerst die entsprechenden Ereignisse zu überlegen und dann stur die Formeln einzusetzen. Ein kurzes Beispiel zur Längenkontraktion / Zeitdilatation:

Ein Stab der Länge L' fliege mit der Geschwindigkeit v an einem Beobachter vorbei. Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ befinde sich der Stab mit seiner Spitze an der Stelle $x = x' = 0$.

- Wie lange dauert es, bis er an Ihnen vorbei ist?
- Wie lange dauert dieser Vorgang im Ruhesystem des Stabes?
- Vergleichen Sie die beiden Zeiten?

- Ist das Ergebnis verträglich mit der Zeitdilatation, und wenn ja wieso?

Dafür stellen wir zunächst die Ereignisse E_i in beiden Systemen K und K' auf. Beim Start der Messung befinden sich beide Systeme mit ihrem Ursprung aufeinander. Im Gestrichenen System des Stabes ist der Ursprung am Anfang des Stabes. Im ungestrichenen System fällt der Ursprung mit dem Beobachter zusammen. Wir haben also:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{62}$$

Zum Zeitpunkt t misst der Beobachter im ungestrichenen System das Ende des Stabes wir erhalten also:

$$E_2 = \begin{pmatrix} ct \\ 0 \end{pmatrix} \tag{63}$$

Die Multiplikation mit c im oberen Eintrag ist Konvention. So haben alle Einträge die Einheit einer Länge. Im System des Stabes befindet sich das Ereignis zur Zeit t' am Ende des Stabes, da das System den Ursprung am Anfang hat also bei $-L'$. Unser Ereignis ist dann:

$$E_2' = \begin{pmatrix} ct' \\ -L' \end{pmatrix} \tag{64}$$

Diese Aufgestellten Ereignisse wollen wir nun mit den Lorentz-Transformationen in Verbindung bringen. Die Ereignisse E_1 und E_1' helfen uns dabei nicht, da hier Gleichungen der Form $0 = 0$ entstehen. Deshalb betrachten wir die Ereignisse E_2 und E_2':

$$x_2' = \gamma \cdot (x_2 - vt_2) \xrightarrow{Einsetzen} -L' = -\gamma \cdot vt \tag{65}$$

$$ct_2' = \gamma \cdot (ct_2 - \frac{vx_2}{c}) \xrightarrow{Einsetzen} ct' = \gamma \cdot ct \tag{66}$$

Dabei ist vt aber gleich der Länge L. Es folgt also:

$$L' = \gamma L \tag{67}$$

$$t' = \gamma t \tag{68}$$

D.h. die Länge des Stabes L in K ist kürzer als die Länge des Stabes, die er eigentlich in Ruhe (System K') hätte. Analog ist in K weniger Zeit vergangen als in K'. Das ist kein Widerspruch dazu, dass bewegte Uhren langsamer gehen, da eigentlich K das Bewegte System ist, da hier nur an einem einzigen Punkt gemessen wurde, in K' aber am Anfang und am Ende des Stabes.

Legt man auch noch einen Stab in K, und setzt seinen Beobachter in K' auf einen festen Punkt, so kehren sich die Verhältnisse genau um. Man sieht also, dass eigentlich nicht entscheidbar ist, welches System das Ruhende und welches das Bewegte ist.