Aufgabe 1

Lösungsvorschlag:

a) $\boldsymbol{\nabla}.\,\mathbf{v} = 3y^2 + 3x^2$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 6xy - 6xy \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ ist auf dem zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{R}^3$ definiert und ist rotationsfrei. Somit ist $\mathbf{v}$ ein Gradientenfeld und besitzt ein Potenzial.

b) $$\mathbf{v}(\mathbf{c}(t)) = \begin{pmatrix} 3(3\sin t)(5\cos t)^2 \\ 3(3\sin t)^2(5\cos t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225\sin t\cos^2 t \\ 135\sin^2 t\cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ -5\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{v}^t \mathbf{dx} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{v}(\mathbf{c}(t)).\dot{\mathbf{c}}(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} 675\sin t\cos^3 t - 675\sin^3 t\cos t\,dt \\ &= 675\int_0^{2\pi} \sin t\cos t(\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt \\ &= \frac{675}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2t)\cos(2t)\,dt \\ &= \frac{675}{4}\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(4t)\,dt}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis war zu erwarten, da $\mathbf{v}$ ein Gradientenfeld ist (alle geschlossene Kurvenintegrale verschwinden)

c)

$$\begin{aligned} \int_{\partial Z} \mathbf{v}.\,\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} &= \int_Z div\,\mathbf{v}\,dV \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 3(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}\int_{0}^{2\pi} 3r^2\,r\,dr\,d\varphi\,dz \\ &= 12\pi\int_0^2 r^3\,dr = 12\pi\Big[\frac{1}{4}r^4\Big]_0^2 = 48\pi \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bitte beachten Sie die Veränderung der Angaben!
Lösungsvorschlag:

a) $\sin\xi_2 = x_2 \quad \Rightarrow \quad \xi_2 = \arcsin x_2$
$\cos(\xi_1+\xi_2) = x_1 \quad \Rightarrow \quad \xi_1+\xi_2 = \arccos x_1$
$\Rightarrow \xi_1 = \arccos x_1 - \arcsin x_2$ Somit gilt:

$$\boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \arccos x_1 - \arcsin x_2 \\ \arcsin x_2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}} &= \mathcal{J}_\Phi \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(\xi_1+\xi_2) & -\sin(\xi_1+\xi_2) \\ 0 & \cos\xi_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} &= (\mathcal{J}_\Phi^{-1})^T \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}} \\ &= -\frac{1}{\sin(\xi_1+\xi_2)\cos\xi_2} \begin{pmatrix} \cos\xi_2 & \sin(\xi_1+\xi_2) \\ 0 & -\sin(\xi_1+\xi_2) \end{pmatrix}^T \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sin(\xi_1+\xi_2)} & -\frac{1}{\cos\xi_2} \\ 0 & \frac{1}{\cos\xi_2} \end{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Lösungsvorschlag:

a) $\mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2uv}} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{u}{\sqrt{2uv}} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} -\frac{v}{\sqrt{2uv}} \\ -\frac{u}{\sqrt{2uv}} \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\| \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \| = \sqrt{\left(\frac{v}{\sqrt{2uv}}\right)^2 + \left(-\frac{u}{\sqrt{2uv}}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{u^2+v^2+2uv}{2uv}} = \frac{u+v}{\sqrt{2uv}}$
$f(\mathbf{x}(u,v)) = \sqrt{2u^3v^3}$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}\int_M f\, d\sigma &= \int_1^2 \int_1^2 uv(u+v)\, du\, dv \\ &= 2\int_1^2 \int_1^2 u^2 v\, du\, dv = 2\int_1^2 u^2\, du \quad \int_1^2 v\, dv \\ &= 7 \end{aligned} \tag{1}$$

Aufgabe 4

Lösungsvorschlag:

$$f(\pi, 0, 0) = 1 - 0 + e^0 cos(\pi - 0) = 0\mathbf{(1)}$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= -e^{-2z} sin(x - y) \\ f_y(x, y, z) &= e^{-2z} sin(x - y) \\ f_z(x, y, z) &= -1 - 2e^{-2z} cos(x - y) \end{aligned}$$

$$f_z(\pi, 0, 0) = -1 - 2e^0 cos(\pi - 0) = 1 \neq 0\mathbf{(1)}$$

Wegen (1) und (2) lässt sich nach dem „Satz über implizite Funktionen“ $f(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung von P nach z auflösen.

Aus $f(x, y, g(x, y)) = 0$, $(x, y) \in$Umgebung von $(\pi, 0)$ folgt:

$$grad\, g(\pi, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{f_x(\pi,0)}{f_z(\pi,0)} \\ -\frac{f_y(\pi,0)}{f_z(\pi,0)} \end{pmatrix} = 0$$

Tangentialebene: z=0

$$z = g(\pi, 0) + (grad\, g(\pi, 0))^T \begin{pmatrix} x - \pi \\ y - 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

Lösungsvorschlag:

Periodizität (offensichtlich)

$$f(x + 2\pi, y) = f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$$

$$f(x + \pi, y + \pi) == f(x, y)$$

a) Niveaulinie z=0

$$0 = cos(2x) + cos(x+y) = 2cos\left(\frac{3x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ oder } \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

mit $k, l \in \mathcal{N}$
Man beachte:

$$cos(a+b) = cos\,a\,cos\,b - sin\,a\,sin\,b$$

$$cos(a-b) = cos\,a\,cos\,b + sin\,a\,sin\,b$$

Ergibt zusammen:

$$2cos\,a\,cos\,b = cos(a+b) + cos(a-b)$$

$$2sin\,a\,sin\,b = cos(a-b) - cos(a+b)$$

$$N_0 = \{(x,y),\}$$

b) Gradient von f:

$$grad\,f(x,y) = \begin{pmatrix} -2sin(2x) - sin(x+y) \\ -sin(x+y) \end{pmatrix}$$

HESSE-Matrix von f:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -4cos(2x) - cos(x+y) & -cos(x+y) \\ -cos(x+y) & -cos(x+y) \end{pmatrix}$$

$$D(x,y) = det\,H_f(x,y) = 4cos(2x)cos(x+y)$$

Stationäre Punkte: $grad\,f(x,y) = 0$

$$f_x(x,y) = -2sin(2x) - sin(x+y) = 0 \qquad \to sin(2x) = 0$$
$$f_y(x,y) - sin(x+y) = 0 \qquad \to sin(x+y = 0$$
$$x_s = m \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$y_s = -x_s + n\pi = -m \cdot \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Klassifizierung der stationären Punkte

$$D(x_s, y_s) = 4cos(m\pi)cos(n\pi) = 4(-1)^{m+n}$$

i) $m+n$ ungerade (x_s, y_s) Sattelpunkt

ii) $m + n$ gerade (x_s, y_s) lokale Extremstelle

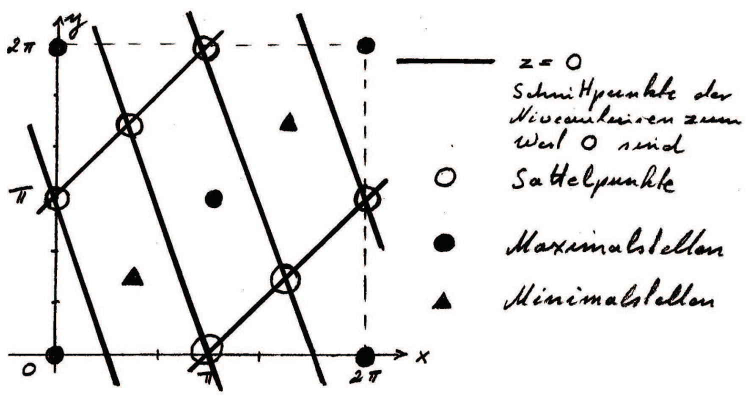
$$f_{yy}(x_s, y_s) - cos(n\pi) = (-1)^{n+1} \begin{cases} > 0 \text{für n ungerade} \\ < 0 \text{für n ungerade} \end{cases}$$

Zusammen:
Maximalstelle, falls m gerade, n gerade
Minimalstelle, falls m ungerade, n ungerade
Sattelpunkt, falls m+n ungerade
Werte an den stationären Punkten:

$$z = cos(m\pi) + cos(2\pi) = (-1)^m + (-1)^n =$$

$$\begin{cases} 2, \text{ falls} m, n \in 2\mathcal{Z} \text{ (Maximalwert)} \\ -2, \text{ falls} m, n \in 2\mathcal{Z} + 1 \text{ (Minimalwert)} \\ 0, \text{ falls} m + n \in 2 + 1\mathcal{Z} \text{ (Wert an den Sattelpunkiten)} \end{cases}$$

c) Wegen Periodizität Beschränkung der Skizze auf $[0, 2\pi]^2$



Aufgabe 6

Lösungsvorschlag: Die Funktion ist nicht definiert im Ursprung, da der Nenner dort verschwindet.
Betrachte Grenzwert am Ursprung (Vereinfachung durch Polarkoordinaten):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + +1} - 1} = \ldots = 2 \text{(l'Hospital)}$$

Damit ergibt sich folgende Funktion:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & , \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & , \text{ für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aufgabe 7

Lösungsvorschlag:

a) Richtig: $\triangle\ F = \nabla(\nabla.F) - \nabla \times (\nabla \times F)$ Beweis:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_x f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_y(\partial_x f_2 - \partial_y f_1) - \partial_z(\partial_z f_1 - \partial_x f_3) \\ \partial_z(\partial_y f_3 - \partial_z f_2) - \partial_x(\partial_x f_2 - \partial_y f_1) \\ \partial_x(\partial_z f_1 - \partial_x f_3) - \partial_y(\partial_y f_3 - \partial_z f_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x(\partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3) - \partial_x\partial_x f_1 - \partial_y\partial_y f_1 - \partial_z\partial_z f_1 \\ \partial_y(\partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3) - \partial_x\partial_x f_2 - \partial_y\partial_y f_2 - \partial_z\partial_z f_2 \\ \partial_z(\partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3) - \partial_x\partial_x f_3 - \partial_y\partial_y f_3 - \partial_z\partial_z f_3 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\triangle\ F &= \nabla(\nabla.F) - \nabla \times (\nabla \times F) \\
\nabla(\nabla.F) &= \nabla(3x^2y + 0 - 2x^2z) = \begin{pmatrix} 6xy^2 - 4xz \\ 6x^2y \\ -2x^2 \end{pmatrix} \\
\nabla \times (\nabla \times F) &= \nabla \times \begin{pmatrix} 6y - 6z^2 \\ 8z^3 + 2xz^2 \\ -2yx^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x^3 + 24z^2 - 4xz \\ -12z + 6x^2y \\ 2z^2 - 6 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \triangle\ F &= \begin{pmatrix} -2x^3 + 6xy^2 + 24z^2 \\ 12z \\ -2x^2 - 2z^2 + 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$