Jonas Kindervater , Ralitsa Bozhanova

Ferienkurs - Höhere Mathematik III für Physiker

Probeklausur

Freitag 20. Februar 2009

Aufgabe 1: Gradientenfelder und Satz von Gauß

Gegeben seien das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3xy^2 \\ 3x^2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der Zylinder $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 4\ ,\ -1 \leq z \leq 1\}$

a) Bestimmen Sie die Divergenz und Rotation von $\mathbf{v}$. Gibt es ein Potential? Begründung!

b) Berechnen Sie $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{v}^T \mathbf{dx}$ entlang der geschlossenen Kurve $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 3\sin t \\ 5\cos t \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in [0\ ,\ 2\pi]$

c) Bestimmen Sie den Fluß von $\mathbf{v}$ durch die Oberfläche von Z nach Aussen mit Hilfe des Satzes von Gauß

Aufgabe 2: Koordinatentransformation

Gegeben sei die Transformation: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{\xi}) \begin{pmatrix} \cos(\xi_1 + \xi_2) \\ \sin \xi_2 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Rücktransformation $\boldsymbol{\xi} = \Psi(\mathbf{x}) = \Phi^{-1}(\boldsymbol{\xi})$

b) Berechnen Sie $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}}$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}$

Aufgabe 3 Oberflächenintegral

Die Fläche M sei parametrisiert durch $\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{2uv} \end{pmatrix}$

$1 \leq u, v \leq 2$
Bestimmen Sie

a) $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$

b) $\displaystyle\int_M f\, d\sigma$ mit $f = \sqrt{2x^3y^3}$

Aufgabe 4 Implizite Funktionen

Man zeige, dass sich

$$f8x, y, z) := 1 - z + e^{-2z} cod(x - y) = 0$$

in der Umgebung des punkte $P := (\pi, 0, 0)$ als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $z = g(x, y)$ darstellen lässt.
Man berechne $grad\, g(\pi, 0)$ und bestimmte Tangentialebene an P der durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ definierten Fläche.

Aufgabe 5 Extrema

Gegeben ist die Fläche:

$$z = f(x, y) := cos(2x) + cos(x + y)$$

a) Man ermittle den Schnitt der Fläche mit der (x,y)-Ebene

b) Man ermittle die Maxima, Minima und Sattelpunkte (einschließlich der zugehörigen z-Werte) der Fläche .

c) Man stelle den Schnitt der Fläche mit der (x,y)-Ebene und die Lage der MAxima,Minima und Sattelpunkte durch eine Skizze in der (x,y)-Ebene dar.

Aufgabe 6 Stetigkeit

Gegeben ist folgende Funktion:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

Für welche Bereiche ist die Funktion definiert? Ergänzen Sie sie stetig.

Aufgabe 7 Vektoranalysis

a) Sei F ein hinreichend oft differenzierbares und stetiges Vektorfeld. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

$$\begin{aligned}
\Box\ \triangle F &= \nabla(\nabla . F) + \nabla \times (\nabla \times F) \\
\Box\ \triangle F &= \nabla(\nabla . F) - \nabla \times (\nabla \times F) \\
\Box\ \triangle F &= \nabla(\nabla . F) - \nabla \times (\nabla . F) \\
\Box\ \triangle F &= \nabla \times (\nabla . F) - \nabla \times (\nabla \times F)
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie $\triangle F$ für $F = \begin{pmatrix} x^3y^2 + 2z^4 \\ 2z^3 \\ 3y^2 - x^2z^2 \end{pmatrix}$