1 Vektoranalysis

Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}.(\mathbf{V}\times\mathbf{W}) &= div\begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} \\
&= \partial_x(v_2w_3 - v_3w_2) + \partial_y(v_3w_1 - v_1w_3) + \partial_z(v_1w_2 - v_2w_1) \\
&= (\partial_x v_2)w_3 - (\partial_x v_3)w_2 + (\partial_y v_3)w_1 - (\partial_y v_1)w_3 + (\partial_z v_1)w_2 - (\partial_z v_2)w_1 \\
&+ v_2\partial_x w_3 - v_3\partial_x w_2 + v_3\partial_x w_1 - v_1\partial_x w_3 + v_1\partial_x w_2 - v_2\partial_x w_1 \\
&= \mathbf{W}.(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}) - \mathbf{V}.(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{W})
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{V}) &= \begin{pmatrix} \partial_y(fv_3) - \partial_z(fv_2) \\ \partial_z(fv_1) - \partial_x(fv_3) \\ \partial_x(fv_2) - \partial_y(fv_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\partial_y v_3 - f\partial_z v_2 + \partial_y f v_3 - \partial_z f v_2 \\ f\partial_z v_1 - f\partial_x v_2 + \partial_z f v_1 - \partial_x f v_3 \\ f\partial_x v_2 - f\partial_y v_1 + \partial_x f v_2 - \partial_y f v_1 \end{pmatrix} \\
&= f\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V} + (\boldsymbol{\nabla}f)\times\mathbf{V}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}) &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_x v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_y(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) - \partial_z(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) \\ \partial_z(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) - \partial_x(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) \\ \partial_x(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) - \partial_y(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) - \partial_x\partial_x v_1 - \partial_y\partial_y v_1 - \partial_z\partial_z v_1 \\ \partial_y(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) - \partial_x\partial_x v_2 - \partial_y\partial_y v_2 - \partial_z\partial_z v_2 \\ \partial_z(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) - \partial_x\partial_x v_3 - \partial_y\partial_y v_3 - \partial_z\partial_z v_3 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{V}) - \Delta\mathbf{V}
\end{aligned}$$

d)

$$\boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}) = \partial_x(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) + \partial_y(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) + \partial_z(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) = 0$$

Aufgabe 2

Es gilt: $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f) = 0 \;\forall\; f \in C^2$

Aufgabe 3

Das Vektorfeld **v** ist auf dem zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{R}^3$ gegeben $\Rightarrow$ **v** ist also genau dann ein Gradientenfeld wenn:

$$rot\ \mathbf{v} = 0$$

gilt.
Es ist:

$$rot\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} v3 - \partial_{x_3} v2 \\ \partial_{x_3} v1 - \partial_{x_1} v3 \\ \partial_{x_1} v2 - \partial_{x_2} v1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ -2x_1 + 2x_1(4-a) \\ 2ax_2 - 2ax_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (6-2a)x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

v ist also genau dann ein Gradientenfeld wenn $a = 3$
Sei $a = 3$ und $\varphi : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein Potential von **v**:

$$\begin{pmatrix} \varphi_{x_1} \\ \varphi_{x_2} \\ \varphi_{x_3} \end{pmatrix} = \nabla \varphi = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3x_2^2 - 2x_1x_3 \\ 6x_1x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Rightarrow \quad \varphi = \int (3x_2^2 - 2x_1x_3)dx_1 = 3x_1x_2^2 - x_1^2x_3 + C_{x_2,x_3} \ (4) \\ & \Rightarrow \quad \varphi_{x_2} = 6x_1x_2 + C_{x_2} \\ (2) \quad & \Rightarrow \quad 6x_1x_2 = 6x_1x_2 + C_{x_2} \\ & \Rightarrow \quad C_{x_2} = 0\ ,\ \ C_{x_2,x_3} = C_{x_3} \\ (4)(3) \quad & \Rightarrow \quad \varphi_{x_3} = -x_1^2 + C_{x_3} = -x_1^2 \quad \Rightarrow C_{x_3} = 0 \\ \text{somit} C \quad & \in \quad \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a)

$$div\mathbf{V} = 2z + 2z - 4z = 0$$

$\Rightarrow$ **V** ist quellenfrei

$$rot\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2xz + y \\ 2yz + x \\ x^2 + y^2 - 2z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 2y \\ 2x - 2x \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \underline{V}$ ist wirbelfrei und hat ein Potential b)

$$\begin{aligned}
f_x &= 2xz + y \Rightarrow f = x^2y + xy + C_1(y,z) \\
\Rightarrow f_y &= x + C_{1y} \doteq 2yz + x \Rightarrow C_1(y,z) = y^2z + C_2(z) \\
\Rightarrow f &= x^2z + xy + y^2z + C_2(z) \\
f_z &= x^2 + y^2 + C_2(z) \doteq x^2 + y^2 - 2z^2 \Rightarrow C_2(z) = -\frac{2}{3}z^3 + C \\
\Rightarrow f &= (x^2+y^2)z + xy - \frac{2}{3}z^3 + C
\end{aligned}$$

wobei C eine Konstante ist. Die unterschiedliche Werte für C bestimmen alle mögliche Potentiale. Um nur ein Potential zu bestimmen suchen wir ein Wert für C aus, z.B $C = 0$

Aufgabe 5

Wir machen die Prametrisierungen :

$$\begin{aligned}
x &= 1 \\
y &= \cos t \\
z &= \sin t
\end{aligned}$$

für $0 \leq t \leq 2\pi$ Dann ist:

$$\int \mathbf{v}^T \mathbf{dx} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0$$

Jetzt mit dem Satz von Stocks:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v}^T \mathbf{dx} = \iint_S (rot\ \mathbf{v})^T \mathbf{dO}$$

Parametrisierung des Kegels:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{u^2+v^2} \\ u \\ v \end{pmatrix} \text{ wobei } u^2+v^2 \leq 1\ (D)$$

Berechnung des Oberflächenelements **dO**

$$\mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{dO} = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt:

$$rot\;\;\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{u^2+v^2} \\ u \end{pmatrix}$$

Somit:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{v}^T \mathbf{dx} &= \iint_D \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix} du\,dv \\ &= \iint_D \left(-u - \frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}} \right) du\,dv \end{aligned}$$

Transformiere in den Polarkoordinaten: $u = r\cos\varphi \quad , \quad v = r\sin\varphi$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v}^T \mathbf{dx} = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} r(cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi)\,dr\,d\varphi = 0$$

Aufgabe 6

Der Fluß durch ∂B in Richtung der äußeren Normalen ist :

$$\int_{\partial B} \mathbf{V}(\mathbf{x})^T \mathbf{w} dw$$

1.a) direkt

Wir parametrizieren ∂B

$$\mathbf{x} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad 0 \le u \le 2\pi; \quad -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$$

Die Normale ist :

$$w = \Sigma_u \times \Sigma_v = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} = \cos v \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\partial B} \mathbf{V}^T \mathbf{w} dw = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ 2\sin v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos u \cos^2 v \\ \sin u \cos^2 v \\ \sin^2 v \end{pmatrix} dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\underbrace{\cos^2 u \cos^3 v + \sin^2 u \cos^3 v}_{\cos^3 v = (1-\sin^2 v)\cos v} + 2\cos v \sin^2 u) dudv \\ &= 2\pi(\sin v - \frac{1}{3}\sin^3 v + \frac{2}{3} sin^3 v)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}\pi \end{aligned}$$

1.b) mit Satz von Gauß

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_B div\mathbf{V}dxdydz = \int_B (1+1+2)dxdydz \\ &= 4.\text{Volumen der Eins- Kugel} = 4.\frac{4}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi\end{aligned}$$

Aufgabe 7

$$\Phi = \int_{\partial Q} \mathbf{V}^T\mathbf{w}dw = \int_Q div\mathbf{V}dxdydz = \int_0^1\int_0^2\int_0^3 2y\ dxdydz = 1.4.3 = 12$$

Aufgabe 8

Wir führen Kugelkoordinaten :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Sigma(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta \\ R\sin\varphi\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \text{für}\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi; \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Die Normale ist :

$$\begin{aligned} w = \Sigma_\varphi \times \Sigma_\theta &= \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\cos\theta \\ R\cos\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\cos\varphi\sin\theta \\ -R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix} = R^2\cos\theta \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \cos\theta \|x\|_2 \mathbf{x} \end{aligned}$$

Der Fluß ist:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\partial\varrho(R)} \mathbf{K}^T\mathbf{w}\ dw = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\gamma m_1 m_2 \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}\right)\cos\theta\|x\|_2\mathbf{x}\ d\theta d\varphi \\ &= -\gamma m_1 m_2 \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\theta\ d\theta d\varphi = -4\pi\gamma m_1 m_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Phi$ unabhängig von R

2 Fourierreihen

Aufgabe 1

$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^2} \Rightarrow \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{1}{k^2}$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = -\frac{i}{2k^2} \\ c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = -\frac{i}{2k^2} \\ \Rightarrow f(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad \text{für} \quad k \neq 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$f = |x|$ ist eine gerade Funktion $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

für $n > 0$ ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} . \frac{1}{n^2} [\cos nx + nx \sin nx]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = -\frac{4}{\pi n^2} \quad \text{für} \quad n = 1, 3, 5... \quad \text{sonst} \quad 0 \end{aligned}$$

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$$