1 Vektoranalysis

Aufgabe 1

Zeigen Sie dass:

a) $\boldsymbol{\nabla}.(\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \mathbf{W}.(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V}) - \mathbf{V}.(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{W})$

b) $\boldsymbol{\nabla} \times (f\mathbf{V}) = f\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} + (\boldsymbol{\nabla} f) \times \mathbf{V}$

c) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{V}) - \Delta\mathbf{V}$

d) $\boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V}) = 0$

Aufgabe 2

1.2 Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x,y,z) = \tanh(\frac{cos(x^2)-y}{e^z})$. Berechnen Sie $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f)$

Aufgabe 3

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} ax_2^2 - 2x_1x_3 \\ 2ax_1x_2 \\ -x_1^2(4-a) \end{pmatrix} \tag{1}$$

ein Gradientenfeld? Berechnen Sie gegebenfalls ein zugehöriges Potential.

Aufgabe 4

Gegeben ist das Vektorfeld $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2xz + y \\ 2yz + x \\ x^2 + y^2 - 2z^2 \end{pmatrix}$

a) Untersuchen sie, ob $\mathbf{V}$ quellenfrei bzw. wirbelfrei ist.

b) Bestimmen sie ein Potential f von $\mathbf{V}$

Aufgabe 5

Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld $\mathbf{v(x)} = (xz, xy, -z)^T$ auf dem Stück des Kegelmantels $y^2 + z^2 = x^2$, das zwischen $x = 0$ und $x = 1$ liegt.

Aufgabe 6

Berechnen Sie den Flu ß des Vektorfeldes $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (x, y, 2z)^T$ durch die Oberfläche der Kugel $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ in Richtung der äußeren Normalen

a) direkt

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß

Aufgabe 7

Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (z, y^2, x)^T$ durch die Oberfläche des Quaders $Q = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq \ 1,\ \ 0 \leq y \leq \ 2,\ \ 0 \leq x \leq 3\}$ in Richtung der äußeren Normalen mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß

Aufgabe 8

Zeigen Sie, daß der Fluss des Gravitationfeldes $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}$ durch die Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, R > 0$ vom Radius R der Sphäre unabhängig ist.

2 Fourierreihen

Aufgabe 1

Stellen sie die Sinus-Reihe $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^2}$ in der Form $f(t) = \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ dar

Aufgabe 2

Gegeben ist die 2π -periodische Funktion f durch $f(x) = |x|$, für $-\pi \leq x \leq \pi$. Berechnen sie die Koeffizienten der zugehörigen reelen Fourier- Reihe $F(x)$