4.3 Oberflächenintegrale

Man unterscheidet zwischen skalaren und vektorielle Oberflächenintegrale. Sei $x = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ eine $\mathbb{C}^1$-Parametrisierung der Fläche $F = \mathbf{p}(K)$.

$f : F \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\int_F f d\sigma = \int_K f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| \mathbf{du}$$

Oberflächenintegral 1. Art (d. h. skalare Funktion wird integriert)

$\mathbf{v} : F \to \mathbb{R}^3$ stetig. Dann heißt

$$\int_F \mathbf{v} \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_K \left\langle \mathbf{v}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\rangle d(u_1, u_2)$$

Oberflächenintegral 2. Art (d. h. vektorwertige Funktion wird integriert)

4.4 Volumenintegrale

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $\Phi : \ D \to \widetilde{D}$ mit $\boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\xi})$ ist eine stetig differenzierbare Koordinaten transformation und $f : \ D \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Es gilt:

$$\int_{\widetilde{D}} f(\mathbf{x})\, d^n x = \int_D f(\Phi(\boldsymbol{\xi})) \det(\mathcal{J}_\Phi) d^n \boldsymbol{\xi}$$

5 Vektoranalysis

Vektoranalysis ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Vektoren in zwei oder mehr Dimensionen beschäftigt.

5.1 Definitionen

5.1.1 Skalarfeld

Skalarfelder sind Abbildungen $\varphi : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die jedem Punkt $\mathbf{r} \subset A$ einen Skalar zuordnen:

Eine Niveaufläche besteht aus den Punkten, für die die Abbildung φ einen festen Wert C annimt.

Beispiel: Druckverteilung oder Temperaturverteilung in einem 3-dimensionalen Raum: Jedem Punkt kann einen skalren Wert seiner Temperatur oder Druck zugeordnet werden.

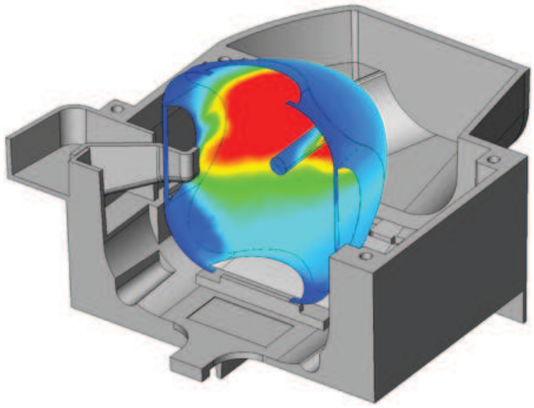

Abbildung 2: Temperaturverteilung in einer Projektorlampe

5.1.2 Vektorfeld

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die jedem Punkt $\mathbf{r} \in A$ einen Vektor $\mathbf{V}(\mathbf{r}) \subset \mathbb{R}^n$ zuordnet.

Bispiel: Die Gravitationskraft $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ der Erde kann als ein Vektorfeld betrachtet werden. Hier gehen wir von einer konstanten Dichte aus. Es seien R der Erdradius, g die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche und m eine Probemasse an der Stelle $\mathbf{r} = (x, y, z)$ mit $|\mathbf{r}| =: r$. Es gilt:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{mg}{R}\mathbf{r} & \text{für } r \in [0 \;\; R] \\ -\frac{mgR^2}{r^3}\mathbf{r} & \text{für } r > R \end{cases}$$

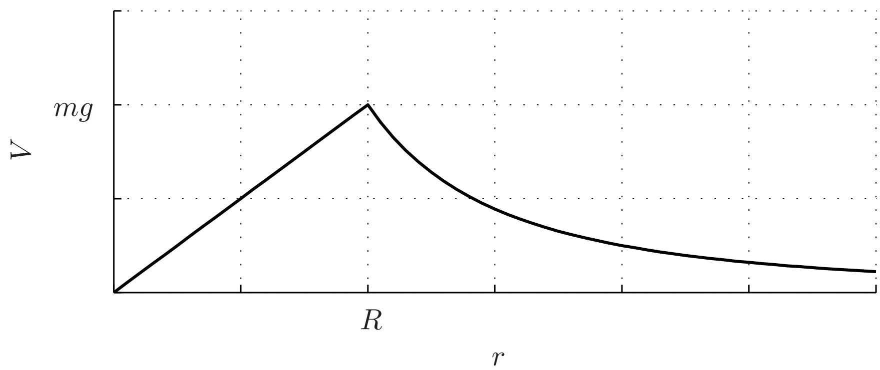

Abbildung 3: Betrag der Erde-Gravitationskraft

5.1.3 Gradientenfeld

Ein Vektorfeld $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Gradientfeld, wenn eine skalare Funktion $U : A \to \mathbb{R}$ existiert mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} & \frac{\partial U}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial U}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T}_{\boldsymbol{\nabla}} U \\ &= \boldsymbol{\nabla} U \end{aligned}$$

U heißt Potential von F.

Gradientenfelder haben drei wichtige Eigenschaften:

Sie sind rotationsfrei. ($rot(\mathbf{F}) = 0$). Die Rotationsfreiheit ist durch die *Integralitätsbedingung* gegeben. Diese besagt, dass $\mathbf{F}$ genau dann ein Gradientenfeld ist, wenn auf eine offene und sternförmige Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ folgendes gilt:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall\, i, j \in \{1...n\}$$

Kurvenintegrale sind wegunabhängig. Es gilt für jeden Weg γ auf einem Interval $[a, b]$ mit $\gamma(a) = \mathbf{r}_a$ und $\gamma(b) = \mathbf{r}_b$:

$$\int_\gamma \mathbf{F.dr} = U(x_b) - U(x_a)$$

Alle geschlossne Kurvenintegrale verschwinden.

5.2 Rechenoperationen

In der Vektoranaysis werden häufig drei Differentialoperatoren verwendet. Im Folgende werden diese für den dreidimensionalen Fall präsentiert:

Gradient eines Skalarfeldes ⇒ Vektorfeld

$$grad\ f = \boldsymbol{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}^T$$

Divergenz eines Vektorfeldes ⇒ Skalarfeld:

$$\begin{aligned} div\ F &= \boldsymbol{\nabla} . \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Die Divergenz sagt aus, ob und wo das Feld Quellen (Divergenz größer Null) oder Senken (Divergenz kleiner Null) hat. Ist die Divergenz gleich Null, so bezeichnet man das Feld als quellenfrei.

Rotation eines Vektorfeldes ⇒ Vektorfeld:

$$\begin{aligned} rot\ \mathbf{F} &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Rotation gibt an ob ein Vektorfeld dazu tendiert, um Punkte zu rotieren. Somit beschreibt die Rotation die lokale Wirbeldichte eines Vektorfeldes.

Laplace opearator (Δ):

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= div(grad\ \varphi) = \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\nabla}\varphi \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \varphi \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

5.3 Identitäten

Die folgenden Identitäten erweisen sich oft für Umformungen sehr nützlich

$$\begin{aligned} I_1 &: \quad \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi) = 0 \\ I_2 &: \quad \boldsymbol{\nabla}.\,(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}) = 0 \\ I_3 &: \quad \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\,\mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F} \end{aligned}$$

Für quellenfreie und rotationfrei Vektorfelder, kann man die folgende zusätzliche Beziehungen verwenden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}.\,\mathbf{F} &= 0 \Rightarrow \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{G} \qquad \text{wobei } \mathbf{G} \text{ ein Vektorfeld ist} \\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} &= 0 \Rightarrow \mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}g \qquad \text{wobei } g \text{ ein Skalarfeld ist} \end{aligned}$$

5.4 Integralsätze der Vektoranalysis

Satz von Stoke Sei M eine beschränkte Fläche in $\mathbb{R}^3$und ∂M ihr Rand. Dann gilt für ein stetig differenziarbares Vektorfeld F:

$$\int_M (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\,.\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = \oint_{\partial M} \mathbf{F}.\,\mathbf{ds}$$

Satz von Gauß Ein Speziallfall der Satz von Stoke ist der gaußcher Satz. Sei V ein glatt berandeter Bereich in $\mathbb{R}^3$.Es gilt:

$$\int_V (\boldsymbol{\nabla}.\, \mathbf{F})\, dV = \oint_{\partial V} \mathbf{F}.\, \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$$

6 Fourierreihen

Definition *Periode*
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst T-periodisch falls für alle $t \epsilon \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t+T) = f(t)$$

Jede T-periodische Funktion lässt sich durch Überlagerung von Grundschwingungen $\cos(wt), \sin(wt)$ und zugehörigen Oberschwingungen $\cos(kwt), \sin(kwt), k = 2, 3...$ in Form einer Fourier-Reihe darstellen:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kwt) + b_k \sin(kwt)]$$

wobei $w = \frac{2\pi}{T}$ ist. Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich wie folgendermaßen berechnen:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(kwt) dt$$
$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(kwt) dt$$

Die reelwertige Fourierreihe kann zu einer komplexwertigen Reihe erweitert werden:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikwt}$$

Wobei:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ikwt} dt$$

Man kann die komplexe Fourierkoeffizienten aus den reelen ausrechnen :

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & \text{für } k < 0 \\ \frac{a_0}{2} & \text{für } k = 0 \\ \frac{a_k - ib_k}{2} & \text{für } k > 0 \end{cases}$$