Integralrechnung

Aufgabe 1

Sei $D = [0,1] \times [-\frac{1}{2}, 0] \times [0, \frac{1}{3}]$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2$. Berechnen sie $\int_D f dx$.

Aufgabe 2

Skizzieren Sie den Bereich $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2 - x^2,\ 2y \leq x + 4,\ y \geq x,\ x \geq 0\}$ und berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int\int_B \left(1 - \frac{2x}{y}\right) dF$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie $\int_C f(x)\ ds, \quad \mathbf{x} = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ für $f(x) = x^2 + y^2 + \frac{1}{z}$ und den Kurvenbogen C mit der Parameterdarstellung $x(t) = (\cos t, \sin t, \cosh t)^T$,
$0 \leq t \leq 2\pi$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Schraubenlinie $\mathbf{S}(t) = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 4\pi$

a) Berechnen Sie deren Länge

b) Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$\int_S \mathbf{V}(\mathbf{x}).d\mathbf{x}$ für $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Das beschränkte Gebiet G der x, y Ebene sei berenzt durch die $x-$Achse , die $y-$Achse sowie die Geraden $x + y = 1$ und $x + y = 2$

a) Skizzieren sie G

b) Bestimmen sie den Bereich S der u, v-Ebene, der durch die Koordinatentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u+v) \\ \frac{1}{2}(u-v) \end{pmatrix}$ aus G entsteht und skizierre S

c) Man berechne $x_u y_v - x_v y_u$

d) Man berechne $\int\int_G exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$

Aufgaben 6

Berechnen Sie den Flächeninhalt des beschränkten Bereichs im $\mathbb{R}^2$, der begrenzt wird durch die Parabeln

$$x = \frac{1}{2}(1-y^2); \quad x = \frac{1}{2}(y^2-1); \quad x = \frac{1}{2}\Big(4 - \frac{y^2}{4}\Big)$$

mit Hilfe der Transforamtion (von Parabelkoordinaten(u, v) auf kathersichen Koordinaten (x, y))

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ \frac{1}{2}(uv) \end{pmatrix}, \quad u > 0$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Volume und Trägheitsmomente bzgl. der Achsen eines Ellipsoids $E = \{(x, y, z); \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ mit den Halbachsen a, b, c und der Massendichte $\varrho \equiv 1$ mit Hilfe der Transformation auf ein (r, φ, θ)-Koordinatensystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r,\varphi,\theta) \\ y(r,\varphi,\theta) \\ z(r,\varphi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\cos\varphi\cos\theta \\ br\sin\varphi\cos\theta \\ cr\sin\theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r, \ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \ \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 8

Gegeben sei ein Zylinder $Z = \{(x, y, z) :\in \mathbb{R}^3, \ \ x_1^2 + x_2^2 \leq 4, \ \ 0 \leq x_3 \leq \ 1\}$
mit den Massendichte $\varrho(x_1, x_2, x_3) = 2 - x_3$

a) Berechnen Sie die Gesamtmasse von Z

b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von Z

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Volumen des Körpers K, der begrenzt wird von der Sphäre $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16$ und dem Kegel $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
Hinweis : Führen Sie Kugelkoordinaten ein.