Extremwertberchnung für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$:

1. **Stationäre** Punkte $\mathbf{a}_i$ berechnen:

$$\nabla f(\mathbf{a}_i) = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_i$$

2. Stationäre Punkte durch $H_f(\mathbf{a}_i)$ charakterisieren (siehe oben).

3. Extrema auf Rand und Eckpunkten bestimmen (Vorlesung am Dienstag).

3 Koordinatentransformation

3.1 Einführung

Eine Koordinatentransformaiton Φ ist die Übertragung von Koordinaten von einem Koordinatensystem (KS) in einem anderen. Koordinatentransformationen sind bijektiv und beliebig differenzierbar. Im Folgenden werden die Koordinaten des Ursprungs und Ziel-KS jeweils mit x_i und ξ_i bezeichnet. Die Einheitsvektoren sind $\mathbf{e}_i$ bzw. $\widetilde{\mathbf{e}}_i$:

$$\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\xi} = \sum_i \xi_i \widetilde{\mathbf{e}}_i$$

Beispiel Hier gilt:

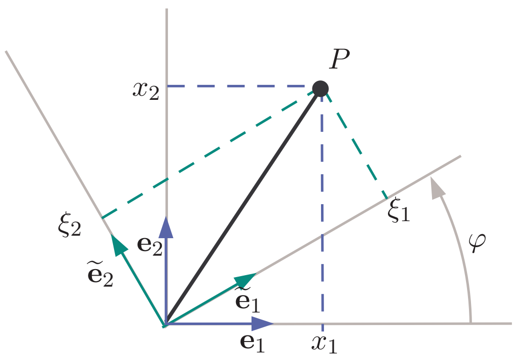

Abbildung 1: Beispiel für Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{e}}_1 &= \cos\varphi\, \mathbf{e}_1 + \sin\varphi\, \mathbf{e}_2 \\ \widetilde{\mathbf{e}}_2 &= -\sin\varphi\, \mathbf{e}_1 + \cos\varphi\, \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Somit:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi} &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1 \widetilde{\mathbf{e}}_1 + \xi_2 \widetilde{\mathbf{e}}_2 \\
&= \underbrace{(\xi_1 \cos\varphi - \xi_2 \sin\varphi)}_{x_1} \mathbf{e}_1 + \underbrace{(\xi_1 \sin\varphi + \xi_2 \cos\varphi)}_{x_2} \mathbf{e}_2 \\
\Rightarrow \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}}_{\Phi(\boldsymbol{\xi})}
\end{aligned}
$$

3.2 lokales n-Bein

Sei Φ: $U \in \mathbb{R}^n \to V \in \mathbb{R}^n$ eine Koordinatentransformation. An der Stelle $\mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\xi})$ wird das lokale n-Bein wie folgt definiert:

$$
\mathcal{N} = \Big\{ \mathbf{n}_i \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \mathbf{n}_i = \mathcal{J}_\Phi \mathbf{e}_i \ , \ i \in \{1, 2, .., n\} \Big\}
$$

Wobei $\mathcal{J}_\Phi$ die Jacobi-Matrix der Transformation Φ bezeichnet. Das lokale n-Bein ist also die Menge der Spalten von $\mathcal{J}_\Phi$. Es gilt $\det(\mathcal{J}_\Phi) \neq 0$ da Ψ bijektiv ist. Somit sind die Spalten von $\mathcal{J}_\Phi$ linear unabhängig und das n-Bein spannt $\mathbb{R}^n$ auf.

Beispiel
Betrachte die Zylinde Koordinaten:

$$
\mathbf{x} = \Phi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{matrix} r \geq 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{matrix}
$$

Berechnung der Jacobi-Matrix:

$$
\mathcal{J}_\Phi = \begin{pmatrix} \partial_r \phi_1 & \partial_\varphi \phi_1 & \partial_z \phi_1 \\ \partial_r \phi_2 & \partial_\varphi \phi_2 & \partial_z \phi_2 \\ \partial_r \phi_3 & \partial_\varphi \phi_3 & \partial_z \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Mit Normierung erhhält man:

$$
\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

3.3 Umrechnung des Gradientoperators

Da die Definition des Gradientenoperators nur im Kartesischen KS gültig ist, muss der Operator in neuen KS immer umgerechnet werden:

Umrechnungsformel:
Sei $\Phi \ : \ U \rightarrow V$ eine Transformation. Es gilt:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} = (\mathcal{J}_\Phi^{-1})^T \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}}$$

Beispiel:
Sei die Koordinatentransformation:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 \\ \xi_2^2 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$\mathcal{J}_\Phi = \begin{pmatrix} \xi_2 & \xi 1 \\ 0 & 2\xi_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}_\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi_2} & -\frac{\xi_1}{2\xi_2^2} \\ 0 & \frac{1}{2\xi_2} \end{pmatrix}$$

Schließlich:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} &= (\mathcal{J}_\Phi^{-1})^T \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}} \\ \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi_2} & 0 \\ -\frac{\xi_1}{2\xi_2^2} & \frac{1}{2\xi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\xi_1} \\ \partial_{\xi_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4 Integration

4.1 Satz von Fubini

Seien $f : (I \times J) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ stetig , I und J kompakte Intervallen. Dann gilt:

$$\int_J \int_I f(x,y) dx dy = \int_I \int_J f(x,y) dy dx = \int_{I \times J} f(x,y) d(x,y)$$

4.2 Kurvenintegrale

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{w} : \ [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, die aus regulären Kurvenstücken besteht. $f : \ D \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein stetiges Skalarfeld und $\mathbf{v} : \ D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld.

Kurvenintegral von f längs $\mathbf{w}$:

$$\int_{\mathbf{w}} f \ ds = \int_a^b f(\mathbf{w}(t)) |\dot{\mathbf{w}}(t)| \ dt$$

Kurvenintegral von $\mathbf{v}$ längs $\mathbf{w}$

$$\int_{\mathbf{w}} \mathbf{v}^T \ \mathbf{dx} = \int_a^b \mathbf{v}(\mathbf{w}(t))^T \dot{\mathbf{w}}(t) \ dt$$

4.3 Oberflächenintegrale

Man unterscheidet zwischen skalaren und vektorielle Oberflächenintegrale. Sei $x = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ eine $\mathbb{C}^1$-Parametrisierung der Fläche $F = \mathbf{p}(K)$.

$f : F \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\int_F f d\sigma = \int_K f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| \mathbf{du}$$

Oberflächenintegral 1. Art (d. h. skalare Funktion wird integriert)

$\mathbf{v} : F \to \mathbb{R}^3$ stetig. Dann heißt

$$\int_F \mathbf{v} \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_K \left\langle \mathbf{v}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\rangle d(u_1, u_2)$$

Oberflächenintegral 2. Art (d. h. vektorwertige Funktion wird integriert)

4.4 Volumenintegrale

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $\Phi : \ D \to \widetilde{D}$ mit $\boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\xi})$ ist eine stetig differenzierbare Koordinaten transformation und $f : \ D \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Es gilt:

$$\int_{\widetilde{D}} f(\mathbf{x})\, d^n x = \int_D f(\Phi(\boldsymbol{\xi})) \det(\mathcal{J}_\Phi) d^n \boldsymbol{\xi}$$

5 Vektoranalysis

Vektoranalysis ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Vektoren in zwei oder mehr Dimensionen beschäftigt.

5.1 Definitionen

5.1.1 Skalarfeld

Skalarfelder sind Abbildungen $\varphi : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die jedem Punkt $\mathbf{r} \subset A$ einen Skalar zuordnen:

Eine Niveaufläche besteht aus den Punkten, für die die Abbildung φ einen festen Wert C annimt.

Beispiel: Druckverteilung oder Temperaturverteilung in einem 3-dimensionalen Raum: Jedem Punkt kann einen skalren Wert seiner Temperatur oder Druck zugeordnet werden.