Jonas Kindervater

Ferienkurs - Höhere Mathematik III für Physiker

Musterlösungen Aufgabenblatt 2

Dienstag 17. Februar 2009

Aufgabe 1 (Implizite Funktionen)

$$f(x,y) = x^2 - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}y^4 = 0$$

Man bestimme die lokale Auflösungsfunktion der $y = h(x)$ mit $1 = h(-\frac{1}{2})$, sowie die Ableitung $h^{'}(\frac{1}{2})$.

Lösungsvorschlag:
Es ist $f(\frac{-1}{2}, 1) = 0$ und $f_y = -xy - 2y^3$ also ist $f_y(\frac{-1}{2}, 1) = -\frac{3}{2} \neq 0$. Folglich existiert lokal eine Funktion $y = h(x)$ mit $1 = h(-\frac{1}{2})$ und $f(x, h(x)) = 0$ für alle x aus einer geschickt gewählten Umgebung $U_\epsilon(-\frac{1}{2})$.
Berechnung von $y = h(x)$:

$$y^4 + xy^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow y_{1,2}^2 = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + 2x^2} = -\frac{x}{2} \pm \frac{3}{2}x$$

$$\Rightarrow y_1^2 = x, y_2^2 = -2x, h(-\frac{1}{2}) = 1 \Rightarrow y = y_2 = h(x)\sqrt{-2x}$$

Die Ableitung $h^{'}(-\frac{1}{2})$ kann man auf drei Arten berechnen:

1. Die Auflösung $h(x)$ differenzieren: $h^{'}(x) = \frac{-1}{\sqrt{-2x}} \Rightarrow h^{'}(-\frac{1}{2}) = -1$

2. Die Geleichung $x^2 * -\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}y^4 = 0$ implizit differenzieren:

$$\Rightarrow 2x - \frac{1}{2}y^2 - xyy^{'} - 2y^3y^{'} = 0, x = -\frac{1}{2}, y = 1 \Rightarrow y^{'}(-\frac{1}{2}) = h^{'}(-\frac{1}{2}) = -1$$

3. Satz über implizite Funktionen

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - \frac{1}{2}y^2, f_x(-\frac{1}{2}, 1) = -\frac{3}{2} \\ f_y &= -xy - 2y^2, f_y(-\frac{1}{2}, 1) = -\frac{3}{2} \\ \Rightarrow h^{'}(-\frac{1}{2}) &= -\frac{f_x(-\frac{1}{2}, 1)}{f_y(-\frac{1}{2}, 1)} = -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Implizite Funktionen)

$$f(x, y, z) = xe^x + y\, sin\, y - z\, ln\, z = 0$$

ist bei $(1, \pi, e)$ *nach allen Variablen auflösbar. Für* $y = h(x, z)$*, bzw.* $z = g(x, y)$ *berechne man* $h^{'}(1, e)$*,bzw.* $g^{'}(1, \pi)$*.*

Lösungsvorschlag:

Eien formelmäßige Auflösung nach einer Variablen z.B. y ist uns nicht möglich.

$$\begin{aligned} f_x &= (x+1)e^x \Rightarrow f_x(1, \pi, e) = 2e \neq 0 \\ f_y &= sin\, y + y\, cos\, y \Rightarrow f_y(1, \pi, e) = -\pi \neq 0 \\ f_z &= -(1 + ln\, z) \Rightarrow f_z(1, \pi, e) = 2 \neq 0 \\ \Rightarrow grad\, f(1, \pi, e) &= (2e, -\pi, 2) \end{aligned}$$

Da alle Komponenten von $grad\, f(1, \pi, e) = (2e, -\pi, 2)$ ungleich Null sind, lässt sich die Gleichung $xe^x + y\, sin\, y - z\, ln\, z = 0$ an der Stelle $(1, \pi, e)$ lokal nach allen drei Variablen auflösen.

Für die Auflösung nach $y = h(x, z)$ mit $\pi = h(1, e)$ und $f(x, h(x, z), z) = 0$ gilt:

$$h^{'}(1, e) = grad\, h(1, e) = (h_x, h_y) = -\frac{1}{f_y}(f_x, f_z) = \frac{1}{\pi}(2e, 2)$$

Für die Auflösung nach $z = g(x, y)$ mit $e = g(1, \pi)$ und $f(x, y, g(x, y)) = 0$ gilt:

$$g^{'}(1, \pi) = grad\, g(1, \pi) = (g_x, g_y) = -\frac{1}{f_z}(f_x, f_y) = -\frac{1}{2}(2e, -\pi)$$

Aufgabe 3 (Taylorpolynom zweiten Grades) *Man berechne das Taylorpolynom zweiten Grades* $T_2(x, y)$ *von* $f(x, y) = cos\, xy + xe^{y-1}$ *an der Stelle* $\boldsymbol{x}_0)(\pi, 1)$*.*

Lösungsvorschlag:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= cos\,xy + xe^{y-1} & f(\pi,1) &= -1+\pi \\
f_x(x,y) &= -y\,sin\,xy + e^{y-1} & f_x(\pi,1) &= 1 \\
f_y(x,y) &= -x\,sin\,xy + xe^{y-1} & f_y(\pi,1) &= \pi \\
f_{xx}(x,y) &= -y^2\,cos\,xy & f_{xx}(\pi,1) &= 1 \\
f_{xy}(x,y) &= -sin\,xy - xy\,cos\,xy + e^{y-1} & f_{xy}(\pi,1) &= 1+\pi \\
f_{yy}(x,y) &= -x^2\,cos\,xy + xe^{y-1} & f_{yy}(\pi,1) &= \pi^2+\pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_2 &= f(\boldsymbol{x}_0) + grad\,f(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot H_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \\
&= (-1+\pi) + \begin{pmatrix}1\\ \pi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-\pi\\ y-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2!}(x-\pi, y-1)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1+\pi\\ 1+\pi & \pi^2+\pi\end{pmatrix}\cdot(x-\pi, y-1) \\
&= \pi + \frac{3}{2}\pi^2 - 2\pi x - 2(1+\pi)y + x^2 + (1+\pi)xy + y^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 (Taylorpolynom zweiten Grades)

$$f(x,y,z) = cos\,x\cdot sin\,y\cdot e^z$$

a) Man bestimme das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(x,y,z)$ von f mit dem Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (0,0,0)$.

b) Man bestimme ein $r>0$, sodass für $|\boldsymbol{x}| < r$ gilt:

$$|f(x,y,z) - T_2(x,y,z)| < 10^{-5}$$

Lösungsvorschlag:

a)

$$
\begin{aligned}
f_x &= -sin\,x\,sin\,y\,e^z & f_x(\mathbf{0}) &= 0 \\
f_y &= cos\,x\,cos\,y\,e^z & f_y(\mathbf{0}) &= 1 \\
f_z &= cos\,x\,sin\,y\,e^z & f_z(\mathbf{0}) &= 0 \\
f_{xx} &= -cos\,x\,sin\,y\,e^z & f_{xx}(\mathbf{0}) &= 0 \\
f_{xy} &= -sin\,x\,cos\,y\,e^z & f_{xy}(\mathbf{0}) &= 0 \\
f_{xz} &= -sin\,x\,sin\,y\,e^z & f_{xz}(\mathbf{0}) &= 0
\end{aligned}
$$

Ebenso ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
f_{yx} &= 0 & f_{zx} &= 0 \\
f_{yy} &= 0 & f_{zy} &= 1 \\
f_{yz} &= 1 & f_{zz} &= 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow T_2(x,y,z) = y + \frac{1}{2!}(yz + zy) = y + yz)$$

b) Es ist $|f - T - 2| = |R_2|$. Es gibt ein (χ, η, θ) zwischen $(0,0,0)$ und (x,y,z), mit:

$$R_2(x,y,z) = \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial}{\partial z}\Delta z\right)^3 f(\chi,\eta,\theta)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial}{\partial z}\Delta z\right)^3 f(\chi,\eta,\theta) =$$
$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}x^3 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}y^3 + \frac{\partial^3}{\partial z^3}z^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}x^2 y + 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}xy^2 + \dots\right)^3 f(\chi,\eta,\theta)$$

Es ist z.B. $3\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} f(\chi,\eta,\theta) = f_{xxy}(\chi,\eta,\theta)x^2 y = 3(-cos\,\chi\, cos\,\eta\, e^{theta})x^2 y$. Die dritten partiellen Ableitungen an der Stelle (χ,η,θ) sind alle von der Form $sin/cos\,\chi \cdot sin/cos\,\eta \cdot e^{\theta}$ und folglich dem Betrag nach $\leq e^{\theta} \leq e^{z}$, also gilt:

$$\begin{aligned} |R_2(x,y,z)| &\leq \frac{1}{3!}|x+y+z|^3 e^z \leq \frac{1}{3!}(|x|+|y|+|z|)^3 e^z \\ &\leq \frac{1}{3!}e^{1/100}(3\cdot 10^{-2})^3 \leq \frac{9}{2}e^{1/100}10^{-6} < 10^{-5}, \text{ falls } |\boldsymbol{x}| < r = 10^{-2} \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Kritische Punkte) *Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *und chrakterisieren Sie diese.*

$$f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$$

Lösungsvorschlag:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 - 12y \\ -12x + 24y^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$I \quad 3x^2 - 12y = 0$$

$$II \quad -12x + 24y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2y^2$$

II in I:

$$0 = y(y^3 - 1) \Leftrightarrow (y_1 = 0, x_1 = 0) \quad \vee \quad (y_2 = 1, x_2 = 2)$$

Die Punkte $P_1(0,0)$ und $P_2(2,1)$ sind stationäre, bzw. kritische Punkte.

$$\det(H_f(x)) = \det\begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix} = 288xy - 122$$

Es ergibt sich:

$$P_1(0,0) : \det(H_f(0,0)) = -122 < 0 \Rightarrow Sattelpunkt$$

$$P_2(2,1) : \det(H_f(2,1)) > 0 \quad \text{mit} \quad f_{xx}(2,1) = 12 > 0 \Rightarrow lokales Minimun$$

Aufgabe 6 (Extremwertaufgabe) *Gegeben ist die Funktion*

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$$

Diskutieren Sie $f(x,y)$ (Periodizität, Nullstellen) und bestimmen Sie lokale Minima, lokale Maxima und Sattelpunkte. (Betrachten Sie zuerst die Periodizität und schränken Sie so den zu untersuchenden Bereich ein.)

Lösungsvorschlag:

Da $\sin(x)$ 2π-periodisch ist gilt:

$$f(x+2\pi,y) = f(x,y) = f(x,y+2\pi)$$

Es reicht also den Breich $0 \leq x < 2\pi$ und $0 \leq y < 2\pi$ zu untersuchen.
Nullstellen: $0 = \sin(x)\sin(y)$

$$\Rightarrow x = n\pi \vee y = m\pi \quad n,m = 0,1,...$$

Kritische Punkte:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix} = 0$$

Fall 1: $\sin(y) = 0 \wedge \sin(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \wedge y = l\pi \Leftrightarrow P_1(k\pi, l\pi)$$

Fall 2: $\cos(y) = 0 \wedge \cos(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi \wedge y = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow P_2(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi)$$

Charakterisierung der kritischen Punkte:

$$\det H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix} = \sin(x)^2 - \cos(y)^2$$

(x,y)	$\det H_f(x,y)$	$f_{xx}(x,y)$	Typ
$(0,0)$	-1		Sattelpunkt
$(\pi,0)$	-1		Sattelpunkt
$(0,\pi)$	-1		Sattelpunkt
(π,π)	-1		Sattelpunkt
$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	1	-1	lokales Maximum
$(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	1	1	lokales Minimum
$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$	1	1	lokales Minimum
$(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$	1	-1	lokales Maximum

Aufgabe 7 (Temperaturverteilung auf einer halbkreisförmigen Platte) *Eine halbkreisförmige Platte (dünn genug, dass wir die Ausdehnung in diese Richtung vernachlässigen können) habe die Temperaturverteilung.*

$$T(x,y) = 10 - 40\frac{x^2y^2}{x^2+y^2},\ \textit{für}\ 0 \leq x,\ 0 < y^2 + x^2 \leq 1,\ T(0,0) = 10$$

Lösungsvorschlag:
(Der Punkt (0,0) wurde gesondert angegeben, ist aber duchr den Limes $x \to 0$ wohldefinierbar.) Der Rand der Platte ist also gegeben durch die Funktion

$$x = 0 \text{ für } -1 \leq y \leq 1 \text{ und } x^2 + y^2 = 1 \text{ für } x > 0$$

gegeben. Wir suchen zuerst nach Extremstellen im Innern. Aus

$$T_x = -40\frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = -40\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = 0$$
$$T_y = -40\frac{2x^2y(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = -40\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

folgen nur die lösungen

$$x = 0,\ y\text{beliebig: } T = 10,\ y\text{beliebig },y = 0 : T = 10$$

Die erste dieser lösungen ist die Gleichung des linken Randes, die zweite Lösung ist die Gerade, die den Halbkreis in zwei Viertelkreise teilt. Da für die Temperatur $T \leq 10$ gilt, handelt es sich in beiden Fällen um Maxima.
Nun betrachten wir die Temperatur an den beiden Randkurven:

1. Linker Rand: In unserem Beispiel ist die Temperatur am linken Rand $x = 0$, $-1 \leq y \leq 1$ bereits durch $T^{(1)}(y) = 10$ gegeben.

2. Kreisrand: Am Rand $x^2 + y^2 0 1$, $x > 0$ können wir eine Variable durch die andere ausdrücken und die Temperatur als Funktion von y schreiben,

$$T^{(2)}(y) = 10 - 40\frac{y^2(1-y^2)}{1} = 40y^4 - 40y^2 + 10$$

und suchen jetzt für diese Funktion die Extremwerte. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} T^{(2)}(y) = 160y^3 - 80y = 0 \Rightarrow & y = 0, & x = 1, T = 10, \\ & y = \frac{1}{\sqrt{2}}, & x = \frac{1}{\sqrt{2}}, T = 0, \\ & y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, & x = \frac{1}{\sqrt{2}}, T = 0, \end{aligned}$$

Die erste der drei lösungen liegt wieder auf der Geraden, die den Halbkreis in zwei Viertelkreise teilt. Wirklich neu sind nur die beiden anderen Lösungen, die beide

Minima entsprechen.
Wir haben schließlich noch Randpunkte der Randkurve zu betrachten, also die Punkte (x=0,x=1) und (x=0,x=-1). Die Temperatur hat in beiden Fällen den Wert 10. Damit haben wir die Untersuchung abgeschlossen und können zusammenfassen. Die Temperatur hat die Extremwerte:

Maxima: T=10 auf den Punktemengen $\{x=0,\ -1 \leq y \leq 1\}$, $\{0 \leq x \leq 1,\ y=0\}$.
minima: T=0 an den Punkten $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Aufgabe 8 (Extremwerte) *Man bestimme die relativen Extremwerte von* $w = f(x,y) = yx^2(4-x-y)$ *im Dreieck, das begrenzt wird durch:* $x=0$, $x=0$, $x+y=6$

Lösungsvorschlag: Zunächst die benötigten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 4x^2y - x^3y - x^2y^2 \\
f_x(x,y) &= 8xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(8-3x-2y) \\
f_{xx}(x,y) &= 8y - 6xy - 2y^2 \\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 8x - 3x^2 - 4xy = xy(8-3x-2y) \\
f_y(x,y) &= 4x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(4-x-2y) \\
f_{yy}(x,y) &= -2x^2
\end{aligned}$$

1. Bestimmung der stationären Punkte:

$$f_y(x,y) = x^2(4-x-2y) \qquad \Rightarrow x=0 \text{ oder } 4-x-2y=0$$

$x=0$ braucht nicht weiter verfolgt werden, da so nur Randpunkte erreicht werden. $4-x-2y=0 \Rightarrow x=4-2y$ eingesetzt in $f_x(x,y) = xy(8-3x-2y)$ ergibt: $(4-2y)y(8-12+6y-2y)=0$, Faktoren einzeln Null setzen ergibt:

$$\begin{aligned}
4-2y=0 \Rightarrow y=2 &\qquad \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,2) \\
y=0 \Rightarrow y=0 &\qquad \Rightarrow x=4 \Rightarrow (4,0) \\
-4+4y=0 \Rightarrow y=1 &\qquad \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,1)
\end{aligned}$$

Die ersten beiden Punkte liegen auf dem Rand und werden später untersucht.

2. Besstimmung der Determinante der HESSE-Matrix in (2,1):

$$D(2,1) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 32 > 0 \text{ und } f_{xx}(2,1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Relatives Maximum}$$

3. Untersuchung des Randes. Man skizziere die Höhenlinie $f(x,y) = x^2y(4-x-y) = 0$, also die Geraden (i) $x=0$, (ii) $y=0$ und (iii) $x+y=4$.

[(i)]Für x=0 ist $f(0,y)=0$. Damit erkennt man, dass für (0,y) mit $0 \leq y \leq 4$ relative Minima und für $4 < y \leq 6$ relative Maxima vorliegen.Bei (4,0) ist kein Extremwert, weil in jeder Umgebung $f > 0$ und $f < 0$ ist.

[(ii)]Entsprechend gilt für $y = 0$ bei (x,0) mit $0 \leq x \leq 4$ relative Minima und für $4 < x \leq 6$ relative Maxima vorliegen.

[(iii)] Für die Punkte auf der Geraden $x + y = 4$ gilt das Gleiche wie für den Punkt (0,4).

[(iv)] Zu letzt bleibt die Gerade $y = 6 - x$ mit $0 \leq x \leq 6$ zu untersuchen:
Man betrachte $\hat{f}(x) := f(x, 6-x) = -2x^2(6-x)$. Aus $\hat{f}_x(x) = x(6x-24) = 0$ folgen als Extremstellen (0,6), (6,0) und (4,2). Die beiden ersten Punkte sind bereits als relative Maxima erkannt. Bei (4,2) könnte ein relatives Minimum liegen, da bei allen bereits erkannten relativen Minima der Funktionswerte Null sind, $f(4,2) = -64$ gilt und f auf dem kompakten Bereich ein absolutes Minimum hat, liegt dieses bei (4,2).

Aufgabe 9 (Kugelschale) *Es sei $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Man Bestimme die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{16} = 0$ mit Hilfe der Lagrangen Multiplikatoren.*

Lösungsvorschlag: Durch $z = f(x,y)$ wird die Kugelschale über der x,y-Ebene mit Radius 1 beschrieben. $g(x,y) = 0$ stellt den Kreis in der xy-Ebene um den Punkt $(\frac{1}{2}, 0)$ mit Radius $\frac{1}{4}$ dar. Anschaulich ist klar, dass das Maximum von f unter der Nebenbedingung im höchsten Punkt auf der Kugelfläche über der Kreislinie liegt, also bei $(\frac{1}{4}, 0)$. Das Minimum dagegen bei $(\frac{3}{4}, 0)$. Dieses Ergebnins lässt sich mit Hilfe der Lagrangen Multiplikatoren wie folgt bestimmen:

1. Aufstellen der Hilfsfunktion:

$$L(x,y,\lambda) = \sqrt{1-x^2-y^2} + \lambda\left((x-\frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{16}\right)$$

2. Bilde den Gradienten der Hilfsfunktion L:

$$\begin{aligned}
&grad\, L = \mathbf{0} \\
L_x(x,y,\lambda) &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 2\lambda\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \\
L_y(x,y,\lambda) &= \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 2\lambda y = y\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 2\lambda\right) = 0 \\
L_\lambda(x,y,\lambda) &= (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{16} = 0
\end{aligned}$$

Aus Gleichung drei folgt $y = 0$ oder $2\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. Für $2\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ ist $L_x \neq 0$. Dies liefert also keine Lösung. Für $y = 0$ folgt aus $L_\lambda = 0$:

$$x^2 - x + \frac{3}{16} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ oder } x = \frac{3}{4}$$

Durch einsetzen in $L_x = 0$ kann man die λ bestimmen, für die $L_x = 0$ ist. Extrema können also nur in den Punkten $(\frac{1}{4}, 0)$ und $(\frac{3}{4}, 0)$ auftreten. Durch Vergleich der Funktionswerte erhält man $f(\frac{1}{4}, 0) > f(\frac{3}{4}, 0)$, sodass $(\frac{1}{4}, 0)$ das Maximum und $(\frac{3}{4}, 0)$ das Minimum ist.