Jonas Kindervater

Ferienkurs - Höhere Mathematik III für Physiker

Musterlösungen Aufgabenblatt 1

Montag 16. Februar 2009

Aufgabe 1 (Vivianische Kurve) $\boldsymbol{x} = (sin\,t \cdot cos\,t, sin^2\,t, cos\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, *ist wegen* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *eine Kurve auf der Einheitskugel. (Kugel um den Ursprung mit Radius eins). Die Kurve läuft vom Nordpol zum Südpol und wieder zzum Nordpol. Sie ist der Schnitt der Einheitskugel mit dem Zylinder* $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
Aufgabe: *Bestimmen Sie den Tangentenvektor der Kurve.*

Lösungsvorschlag: Der Tangentenvektor
Bilden der Ableitung $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} cos^2\,t - sin^2\,t \\ 2sin\,t\,cos\,t \\ -sin\,t \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\boldsymbol{x}}(t)| = \sqrt{sin^2\,t + 1}$$

Damit lautet der Tangenteneinheitsvektor:

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{x}}(t)|}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{1}{\sqrt{sin^2\,t + 1}} \begin{pmatrix} cos^2\,t - sin^2\,t \\ 2sin\,t\,cos\,t \\ -sin\,t \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (Begleitendes Dreibein einer Kurve) *Man berechne das begleitende Dreibein* $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ *und die Bogenlänge* $s(t)$ *mit* $t \in [0, a] \subseteq \mathbb{R}$ *der Kurve* $\boldsymbol{x}(t) = (e^t cos\,t, e^t sin\,t, e^t)$.

Lösungsvorschlag:

1. **Der Tangentenvektor**
   Bilden der Ableitung $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} cos\,t \\ sin\,t \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \cdot \begin{pmatrix} -sin\,t \\ cos\,t \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \cdot \begin{pmatrix} cos\,t - sin\,t \\ sin\,t + cos\,t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\boldsymbol{x}}(t)| = \sqrt{e^{2t} \cdot \Big((cos\, t - sin\, t)^2 + (sin\, t + cos\, t)^2 + 1\Big)} = \sqrt{3}e^t$$

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{x}}(t)|}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} cos\, t - sin\, t \\ sin\, t + cos\, t \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.) **Der Hauptnormalenvektor** Bilden der Ableitung $\dot{\boldsymbol{T}}(t)$

$$\dot{\boldsymbol{T}}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -sin\, t - cos\, t \\ cos\, t - sin\, t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\dot{\boldsymbol{T}}(t)\right| = \frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{N}(t) := \frac{1}{\left|\dot{\boldsymbol{T}}(t)\right|}\dot{\boldsymbol{T}}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} -sin\, t - cos\, t \\ cos\, t - sin\, t \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. **Der Binormalenvektor**

$$\boldsymbol{T}(t) := \boldsymbol{T}(t) \times \boldsymbol{N(t)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} cos\, t - sin\, t \\ sin\, t + cos\, t \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} -sin\, t - cos\, t \\ cos\, t - sin\, t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} sin\, t - cos\, t \\ -sin\, t - cos\, t \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. **Bogenlänge**

$$s(2\pi) = \int_0^a |\dot{\boldsymbol{x}}(t)|\, dt = \sqrt{3} \int_0^a e^t dt = \sqrt{3}(e^a - 1)$$

Aufgabe 3 (Krümmung) *Zu den Zahlen $a > b > 0$ wird folgende Punktmenge in der Ebene betrachtet:*

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Begründen Sie, dass E das Bild der durch $\gamma(t) = (a \cdot cos\, t, b \cdot sin\, t)$, mit $t \in \mathbb{R}$ definierten 2π-periodischen, stetig differenzierbaren regulären Kurve $\gamma : \searrow \to \mathbb{R}^2$ ist. Berrechnen Sie die Krümmung der Kurve $\gamma(t)$ für den Fall das $a = b = r$

Lösungsvorschlag:

Die Kurve $\gamma(t) = (a\, cos\, t, a\, cos\, t)$; $t \in \mathbb{R}$ ist natürlich stetig differenzierbar (elemantare Funktionen) und aufgrund der Periodizitäts-Eigenschaften des Sinus und Cosinus (2π-periodisch). Setzt man die Kurve in E ein,

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{(a\, cos\, t)^2}{a^2} + \frac{(b\, sin\, t)^2}{b^2} = 1$$

so sieht man das $\gamma(t)$ das Bild E besitzt.

Nun berechnen wir die Krümmung der Kurve $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\,cos\,t \\ r\,sin\,t \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Formel aus der Forlesung:

$$\kappa(t) := \frac{\left|\dot{\boldsymbol{T}}(t)\right|}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

Zuerst muss jedoch der Tangentialvektor bestimmt werden:

$$\boldsymbol{T}(t) := \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|}\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -r\,sin\,t \\ r\,cos\,t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin\,t \\ cos\,t \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Krümmung:

$$\kappa(t) := \frac{\left|\dot{\boldsymbol{T}}(t)\right|}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{1}{r} = const$$

Aufgabe 4 (Stetigkeit) *Man zeige:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-cos\,xy}{y} & ,\ \text{für } y \neq 0 \\ 0 & ,\ \text{für } y = 0 \end{cases}$$

ist überall stetig.

Lösungsvorschlag:

Fall 1: $y \neq 0$, d.h. außerhalb der x-Achse, ist f stetig als Quotient stetiger Funktionen. B

Fall 2: $y = 0$, d.h. Stetigkeit auf der x-Achse.
Behauptung: $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0$. Dazu benutzen wir die Taylorreihe der cos-Funktion:

$$cos\,u = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{4!}u^4 \mp \ldots$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1-(1-\frac{1}{2!}x^2y^2 + \frac{1}{4!}x^4y^4 \mp \ldots)}{y} = (\frac{1}{2!}x^2y - \frac{1}{4!}x^4y^3 \mp \ldots)$$

Also gilt: $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0 = f(x_0,0)$ und f ist überall stetig.

Aufgabe 5 (Unter Verwendung von Polarkoordinaten) *Wo ist*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,\ \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\ \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig?

Lösungsvorschlag:

Fall 1: Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f als Funktion stetiger Funktionen stetig.

Fall 2: Zu untersuchen bleibt f in $(x,y) = (0,0)$.

Wechsel auf Polarkoordinaten: $\begin{pmatrix} x = r\,cos\,\varphi \\ y = r\,sin\,\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow f(r,\varphi) = r^4 \, cos^4\,\varphi \, sin\,\varphi \frac{cos^2\varphi - sin^2\varphi}{r^2}$.

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &= \left| r^2 \, cos\,\varphi \, sin\,\varphi (cos^2\varphi - sin^2\varphi) - 0 \right| \\ &= \left| r^2 \, cos\,\varphi \, sin\,\varphi (cos\,2\varphi) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} r^2 \, sin\,2\varphi cos\,2\varphi \right| \leq \frac{1}{2} r^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2} r^2 = 0 \Rightarrow f \text{ ist überall stetig}$$

Aufgabe 6 (Unstetigkeit im Ursprung) *Man zeige das folgende Funktion f im Ursprung unstetig ist:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \textit{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \textit{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Lösungsvorschlag:

Annäherung auf der Geraden $y = 0$: $A = \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$

Annäherung auf der Geraden $x = 0$: $B = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$

Annäherung auf der Geraden $y = x$: $C = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

Der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert also nicht. Daraus folgt f ist unstetig in $(0,0)$.

Aufgabe 7 (Partielle Ableitung und Gradient) *Man bestimme falls vorhanden die partiellen Ableitungen von f, $grad\,f(x,y)$ sowie $grad\,f(1,1)$.*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \textit{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , \textit{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} && , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ f_y &= \frac{-2y(x^2+y^2) - 2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} && , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen im Nullpunkt $(0,0)$:

$$f_x(0,0) = (f(x,0))'_{x=0} = 0, \text{ da } f(x,0) = 1 \text{ ist.}$$

$$f_y(0,0) = (f(0,y))'_{y=0} \text{ existiert nicht, da } f(0,x) = \begin{cases} -1 & , y \neq 0 \\ 1 & , y = 0 \end{cases} \text{ ist.}$$

Betrachtet man $f_x(0,0)$ bzw. $f_y(0,0)$ als Richtungsableitung, so sieht man:

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial(1,0)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 t^{-2} - 1}{t} = 0$$

$f_x(0,0)$ existiert nicht, da

$$\frac{\partial f}{\partial(0,1)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2 t^{-2} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-2}{t} \text{nicht existiert.}$$

$$grad\, f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} & , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ \text{existiert nicht} & , \text{ für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$grad\, f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (Potentialkasten) *Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion* $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\Psi(x,y,z) = \sin(\pi n_x x) \cdot \sin(\pi n_y y) \cdot \sin(\pi n_z z) \; mit\, n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

die Schrödingergleichung für den 3-dimensionalen Potentialkasten löst:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z)$$

und berechnen Sie die möglichen Energieniveaus E_{n_x,n_y,n_z}.

Lösungsvorschlag:
Wir leiten Ψ zweimal nach x ab und erhalten:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,y,z) = -\pi^2 n_x^2 \cdot \sin(\pi n_x x) \cdot \sin(\pi n_y y) \cdot \sin(\pi n_z z) = -\pi^2 n_x^2 \cdot \Psi(x,y,z)$$

Analog folgt $\Psi_{yy}(x,y,z) = -\pi^2 n_y^2 \Psi(x,y,z)$ und $\Psi_z(x,y,z) = -\pi^2 n_z^2 \Psi(x,y,z)$. Dies setzen wir in die gegeben Schrödingergleichung ein und erhalten:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(x,y,z) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = E_{n_x,n_y,n_z}\Psi(x,y,z)$$

$$\Rightarrow E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

Aufgabe 9 (Wellengleichung) *Sei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $c > 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\Psi(t,x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$\Psi(t,x) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

die Wellengleichung

$$\partial_t^2 \Psi(t,x) = c^2 \partial_x^2 \Psi(t,x)$$

erfüllt.

Lösungsvorschlag: Wir führen zunächst die neuen Variablen

$$u(x,t) = x - ct$$
$$v(x,t) = x + ct$$

Nun berechnen wir die partielle Ableitung nach t:

$$\partial_t^2 \Psi(x,t) = \partial_t (f_u(u) \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=-c} + g_v(v) \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{=c}) = -c \cdot f_{uu}(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot g_{vv}(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \left(f_{uu} + g_{vv}\right)$$

Nun nach x:

$$\partial_x^2 \Psi(x,t) = \partial_x \left(f_u \cdot 1 + g_v \cdot 1\right) = f_{uu} + g_{vv}$$

Dies setzt man in die Wellengleichung ein und verifiziert so die Lösung.

Aufgabe 10 (Richtungsableitung)

$$f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}, \ \ mit\ \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man berechne die Richtungsableitung in $\boldsymbol{x}_0$ in Richtung (3,4) un (1,-1). In welchen Richtungen ist die Steigung maximal, minimal, gleich Null? Man bestimme die Tangentialebene E an f bei (1,2), sowie die Tangente T an f bei (1,2) in Richtugn (3,4)

Lösungsvorschlag:

$$grad\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(1+x^2)^2} \\ \frac{1}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

$$grad\, f(1,2) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Der Einheitsvektor in Richtung (3,4) ist $\frac{1}{5}$(3,4), also erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial(3,4)}(1,2) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}$$

und für (1,1):

$$\frac{\partial f}{\partial(-1,1)}(1,2) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

In Richtung

(-1,$\frac{1}{2}$) ist die Steigung maximal:

$$\frac{\partial f}{\partial(-1,\frac{1}{2})}(1,2) = \left|\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

(1,$-\frac{1}{2}$) ist die Steigung minimal:

$$\frac{\partial f}{\partial(1,-\frac{1}{2})}(1,2) = -\left|\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right| = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$\pm$(1,2) ist die Steigung Null:

$$\frac{\partial f}{\partial(1,2)}(1,2) = \begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = 0$$

Gleichung der Tangentialebene E an f im Punkt (1,2,1):
Ein Normalenvektor von E ist $(grad\, f(1,2), -1) = \begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}$.

$$E : (-1, \frac{1}{2}, -1)(x,y,z) = (-1, \frac{1}{2}, -1)(1,2,f(1,2)) \Rightarrow E : 2x - y + 2z = 2$$

Gleichung der Tangente an f im Punkt (1,2,1) in Richtung (3,2):
Tangentenvektor: $\boldsymbol{t} = \frac{1}{5}(3, 4, grad\, f(1,2) \cdot (3,4)) = \frac{1}{5}(3,4,-1)$
Tangente: $T : \boldsymbol{x} = (1,2,1) + r(3,4,-1)$.

Aufgabe 11 (Totales Differential) *Man bestimme das totale Differential der folgenden Funktionen:*

a) $f(x,y) = 4x^3y - 3x \cdot e^y$

b) $f(x,y,z) = \ln(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

Lösungsvorschlag

a) dz= $(12x^2y - 3 \cdot e^y)dx + (4x^3 - 3x \cdot e^y)dy$

a) du= $\frac{x}{x^2+y^2+z^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}dy + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}dz$