Jonas Kindervater

Ferienkurs - Höhere Mathematik III für Physiker

Aufgabenblatt 1

Montag 16. Februar 2009

Aufgabe 1 (Vivianische Kurve) $\boldsymbol{x} = (sin\,t \cdot cos\,t, sin^2\,t, cos\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, *ist wegen* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *eine Kurve auf der Einheitskugel. (Kugel um den Ursprung mit Radius eins). Die Kurve läuft vom Nordpol zum Südpol und wieder zzum Nordpol. Sie ist der Schnitt der Einheitskugel mit dem Zylinder* $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
Aufgabe: *Bestimmen Sie den Tangentenvektor der Kurve.*

Aufgabe 2 (Begleitendes Dreibein einer Kurve) *Man berechne das begleitende Dreibein* $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ *und die Bogenlänge* $s(t)$ *mit* $t \in [0, a] \subseteq \mathbb{R}$ *der Kurve* $\boldsymbol{x}(t) = (e^t cos\,t, e^t sin\,t, e^t)$.

Aufgabe 3 (Krümmung) *Zu den Zahlen* $a > b > 0$ *wird folgende Punktmenge in der Ebene betrachtet:*

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Begründen Sie, dass E das Bild der durch $\gamma(t) = (a \cdot cos\,t, b \cdot sin\,t)$*, mit* $t \in \mathbb{R}$ *definierten* 2π*-periodischen, stetig differenzierbaren regulären Kurve* $\gamma : \setminus \to \mathbb{R}^2$ *ist. Berrechnen Sie die Krümmung der Kurve* $\gamma(t)$ *für den Fall das* $a = b = r$

Aufgabe 4 (Stetigkeit) *Man zeige:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - cos\,xy}{y} & , \text{ für } y \neq 0 \\ 0 & , \text{ für } y = 0 \end{cases}$$

ist überall stetig.

Aufgabe 5 (Unter Verwendung von Polarkoordinaten) *Wo ist*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \textit{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \textit{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig?

Aufgabe 6 (Unstetigkeit im Ursprung) *Man zeige das folgende Funktion f im Ursprung unstetig ist:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \textit{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \textit{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Aufgabe 7 (Partielle Ableitung und Gradient) *Man bestimme falls vorhanden die partiellen Ableitungen von f, grad $f(x,y)$ sowie grad $f(1,1)$.*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \textit{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , \textit{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Aufgabe 8 (Potentialkasten) *Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*

$$\Psi(x,y,z) = \sin(\pi n_x x) \cdot \sin(\pi n_y y) \cdot \sin(\pi n_z z) \ \textit{mit} \, n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

die Schrödingergleichung für den 3-dimensionalen Potentialkasten löst:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x,y,z) = E \Psi(x,y,z)$$

und berechnen Sie die möglichen Energieniveaus E_{n_x,n_y,n_z}.

Aufgabe 9 (Wellengleichung) *Sei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $c > 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\Psi(t,x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$\Psi(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

die Wellengleichung

$$\partial_t^2 \Psi(t,x) = c^2 \partial_x^2 \Psi(t,x)$$

erfüllt.

Aufgabe 10 (Richtungsableitung)

$$f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}, \ \ mit\ \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man berechne die Richtungsableitung in $\boldsymbol{x}_0$ *in Richtung (3,4) un (1,-1). In welchen Richtungen ist die Steigung maximal, minimal, gleich Null? Man bestimme die Tangentialebene E an f bei (1,2), sowie die Tangente T an f bei (1,2) in Richtugn (3,4)*

Aufgabe 11 (Totales Differential) *Man bestimme das totale Differential der folgenden Funktionen:*

a) $f(x,y) = 4x^3y - 3x \cdot e^y$

b) $f(x,y,z) = \ln(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$