

# Ferienkurs Höhere Mathematik 2

## Wintersemester 2008/2009

### 0 Fourierkoeffizienten und Orthonormalsysteme

- a) Sei  $f$  eine gerade Funktion, d.h. es gilt  $f(-x) = f(x)$ . Was kann man über die reellen Fourierkoeffizienten aussagen. Was kann man sagen, wenn die Funktion ungerade ist, d.h. wenn  $f(-x) = -f(x)$  gilt? Was bedeutet dies für die komplexen Fourierkoeffizienten?

Sei  $f(x)$  eine gerade Funktion. Da  $x \mapsto \sin(x)$  eine ungerade Funktion ist, folgt, dass  $x \mapsto f(x) \sin(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine ungerade Funktion ist. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx &= \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx - \int_0^{-\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx - \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0 \end{aligned}$$

Daher gilt, dass alle Sinus-Fourierkoeffizienten  $b_n$  verschwinden. Die komplexen Fourierkoeffizienten sind folglich rein reell (da der Sinusterm nach Verwendung von  $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$  verschwindet).

Analog verfährt im Fall, dass  $f(x)$  eine ungerade Funktion ist. Hier ist  $x \mapsto \cos(x)$  eine gerade Funktion und somit  $x \mapsto f(x) \cos(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ungerade. Wie oben folgert man, dass alle Cosinus-Koeffizienten  $a_n$  verschwinden. Die komplexen Fourierkoeffizienten sind alle rein imaginär.

- b) Es wird häufig benutzt, dass bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten nur die Länge des Integrationsintervalls ausschlaggebend ist, dagegen ist es unwichtig, wo die Grenzen liegen. Beweisen Sie dies, indem Sie zeigen, dass gilt:

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \text{ für } a \in \mathbb{R}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x) e^{-ikx} dx &= \int_{\pi}^{\pi+a} f(x) e^{-ikx} dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx + \int_{-\pi+a}^{-\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx + \int_{-\pi}^{\pi+a} f(x) e^{-ikx} dx - \int_{\pi}^{\pi+a} f(x) e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Substitution  $x = x' + 2\pi$  durchgeführt und die  $2\pi$ -periodizität von  $e^{ikx}$  und  $f(x)$  ausgenutzt wurde.

Einen kurzen eleganten Beweis hatten Sie im Semester gesehen.

---

c) Wie lauten die komplexen Fourierkoeffizienten der folgenden Funktionen:

i.  $f(x) = \sin(x)$  ,  $f(x) = \cos(x)$

---

$$f(x) = \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Daraus folgt, dass  $\hat{f}_k = 0$  für  $k \neq -1, 1$ ,  $\hat{f}_1 = \frac{1}{2i}$  und  $\hat{f}_{-1} = -\frac{1}{2i}$  gilt.

$$f(x) = \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Daraus folgt, dass  $\hat{f}_k = 0$  für  $k \neq -1, 1$ ,  $\hat{f}_1 = \frac{1}{2}$  und  $\hat{f}_{-1} = \frac{1}{2}$  gilt.

---

ii.  $f(x) = \sin^2(x)$  ,  $f(x) = \sin^3(x) + \cos^2(x)$

---

$$f(x) = \sin^2(x) = -\frac{e^{i2x} + e^{-i2x} - 2}{4}$$

Daraus folgt, dass  $\hat{f}_k = 0$  für  $k \neq -2, 0, 2$ ,  $\hat{f}_2 = -\frac{1}{4}$ ,  $\hat{f}_{-2} = -\frac{1}{4}$  und  $\hat{f}_0 = \frac{1}{2}$  gilt.

Es gilt

$$f(x) = \sin^3(x) + \cos^2(x) = \frac{e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}}{-8i} + \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{4} + \frac{1}{2}$$

und darum ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= 0 \text{ für } k \neq -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \\ \hat{f}_{-3} &= \frac{1}{8i} \quad \hat{f}_3 = -\frac{1}{8i} \\ \hat{f}_{-2} &= \frac{1}{4} \quad \hat{f}_2 = \frac{1}{4} \\ \hat{f}_{-1} &= -\frac{3}{8i} \quad \hat{f}_1 = \frac{3}{8i} \\ \hat{f}_0 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

---

d) Zeigen sie, dass die Menge  $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Orthonormalsystem bzgl. des in der Vorlesung eingeführten Skalarproduktes über  $\mathfrak{R}$ . Folgern sie daraus, dass die Menge

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$$

bezüglich des Skalarproduktes  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$  ebenfalls ein Orthonormalsystem ist.

Hinweis: Beim zweiten Teil hilft das Umschreiben der trigonometrischen Funktionen in die komplexe Form weiter.

---

Zum ersten Teil:

$$\begin{aligned}\langle e^{ikx}, e^{ilx} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \cos((k-l)x) dx + i \int_0^{2\pi} \sin((k-l)x) dx \right] \\ &= \delta_{k,l}\end{aligned}$$

Dies gilt, da das Integral über  $[0, 2\pi]$  für  $k \neq l$  null ergibt und für  $k = l$  bleibt nur das erste Integral mit 1 als Integranden übrig.

Der zweite Teil ergibt sich daraus indem man die trigonometrischen Funktionen in die komplexe Schreibweise überführt und dann das Ergebnis vom ersten Teil verwendet.

$$\begin{aligned}\langle \sin(nx), \cos(mx) \rangle &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} (e^{inx} - e^{-inx})(e^{imx} + e^{-imx}) dx \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} (e^{i(n+m)x} - e^{-i(n+m)x} + e^{i(n-m)x} - e^{-i(n-m)x}) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin((n-m)x) dx = \delta_{n,m}\end{aligned}$$

Der Rest folgt analog. Außerdem ist die Normierung ersichtlich, da

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi = \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx$$

gilt.

---

## 1 Fourierreihen I

- a) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  die  $2\pi$ -periodische Funktion, welche aus der periodischen Fortsetzung der Funktion  $f(x) = \exp(ax)$ , mit  $x \in (-\pi, \pi]$  und  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , entsteht. Entwickeln Sie  $f$  in eine Fourierreihe.

---

Benötigt werden folgende Stammfunktionen, welche man über partielles Integrieren berechnet:

$$\begin{aligned}\int e^{ax} \cos(kx) dx &= \frac{e^{ax} \sin(kx)}{k} - \frac{a}{k} \int e^{ax} \sin(kx) dx \\ &= \frac{e^{ax} \sin(kx)}{k} + \frac{ae^{ax} \cos(kx)}{k^2} - \frac{a^2}{k^2} \int e^{ax} \cos(kx) dx \\ \Leftrightarrow \int e^{ax} \cos(kx) dx &= \frac{k}{a^2 + k^2} e^{ax} \sin(kx) + \frac{a}{a^2 + k^2} e^{ax} \cos(kx)\end{aligned}$$

Analog erhält man:

$$\int e^{ax} \sin(kx) dx = \frac{a}{a^2 + k^2} e^{ax} \sin(kx) - \frac{k}{a^2 + k^2} e^{ax} \cos(kx)$$

Damit ergeben sich als Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{\pi a} \\
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos(kx) dx \\
 &= \frac{(-1)^k}{\pi} \frac{k}{k^2 + a^2} (e^{a\pi} - e^{-a\pi}) \\
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin(kx) dx \\
 &= -\frac{(-1)^k}{\pi} \frac{a}{k^2 + a^2} (e^{a\pi} - e^{-a\pi})
 \end{aligned}$$

- b) Sei  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die  $2\pi$ -periodische Funktion, mit  $f(x) = \cos(ax)$  und  $g(x) = \sin(ax)$  für  $x \in [-\pi, \pi]$ . Bestimmen Sie die Fourierreihe von  $g$  und  $f$ .

Hinweis: Mit einer geeigneten Wahl für  $a \in \mathbb{C}$  kann man die Fourierreihen ohne große Rechnung mit Hilfe von Aufgabenteil (a) erhalten.

Wählt man für  $e^{a'x}$  aus Aufgabenteil (a)  $a' = ia$  dann folgt:

$$e^{iax} = \cos(ax) + i \sin(ax) = \frac{2i}{\pi} \sin a\pi \left[ \frac{1}{2ia} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - a^2} (ia \cos(nx) - n \sin(nx)) \right]$$

Daraus erhält man durch Vergleich der Imaginär und Realteile:

$$\begin{aligned}
 \cos(ax) &= \frac{2}{\pi} \sin a\pi \left[ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} a \cos(nx) \right] \\
 \sin(ax) &= \frac{2}{\pi} \sin a\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} n \sin(nx)
 \end{aligned}$$

- c) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} f(x) = x$  für  $x \in [-\pi, \pi]$ .

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^2 - \pi^2}{2} = 0 \\
 \hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(kx) dx - i \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx \right] \\
 &= \frac{i}{2\pi} \left\{ \left[ \frac{x \cos(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx \right\} \\
 &= \frac{i(-1)^k}{k}
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass  $x \cos(xk)$  eine ungerade Funktion ist und daher das Integral verschwindet.

- d) Die Fourierkoeffizienten einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seien gegeben durch  $\hat{f}_0 = \frac{\pi^2}{6}$  und  $\hat{f}_k = \frac{(-1)^k}{k^2}$ ,  $k \neq 0$ . Sei  $f$  eine Stammfunktion zu einer Funktion  $g$ . Wie lauten die Fourierkoeffizienten von  $g$ ? Wie lautet eine Funktion  $f$ , welche die Fourierkoeffizienten  $\hat{f}_k$  hat und für die  $f(0) = 0$  gilt? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch die explizite Berechnung der Fourierkoeffizienten von  $f$ !

Da  $f$  Stammfunktion zu  $g$  ist gilt  $f' = g$ , also folgt für die Fourierkoeffizienten

$$\hat{g} = \hat{f}' = (ik)\hat{f}$$

(siehe Vorlesung) und damit ergibt sich

$$\hat{g}_0 = 0 \quad \text{und} \quad \hat{g}_k = \frac{i(-1)^k}{k}$$

Dies sind eben die Koeffizienten aus (c)! Daher ergibt sich  $g(x) = x$  und somit ergibt sich

$$f(x) = \int g(x)dx + C = \frac{x^2}{2}$$

wobei  $C = 0$  wegen  $f(0) = 0$  gilt.

Die Fourierkoeffizienten von  $f$  berechnen sich durch

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = \frac{\pi^2}{6} \\ \hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} \cos(kx) dx - i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} \sin(kx) dx \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{4\pi \cos(k\pi)}{k^2} \\ &= \frac{(-1)^k}{k^2} \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass  $\frac{x^2}{2} \sin(kx)$  eine ungerade Funktion ist und folglich das Integral verschwindet. Des weiteren wurde die Stammfunktion

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(kx) dx &= \frac{x^2 \sin(kx)}{k} - \frac{2}{k} \int x \sin(kx) dx \\ &= \frac{x^2 \sin(kx)}{k} + \frac{2}{k^2} x \cos(kx) - \frac{2}{k^3} \sin(kx) \end{aligned}$$

verwendet.

## 2 Fourierreihen II

Im folgenden sollen einige Fourierreihe aus vorgegebenen Funktionen berechnet werden, dabei wird die Funktion in einem bestimmten Intervall definiert und die periodisch fortgesetzte Funktion soll entwickelt werden. An welchem Stellen konvergiert die Fourierreihe gegen die entwickelte Funktion?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ für } x \in (-h, h) \\ 0 & , \text{ für } x \in [-\pi, -h] \cup [h, \pi] \end{cases} \quad h \in [-\pi, \pi]$$


---

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^h dx = \frac{2h}{\pi}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^h e^{-ikx} dx = \frac{1}{-2i\pi k} [e^{-ikh} - e^{ikh}] = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(kh)}{k}$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{h}{\pi} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nh)}{n} e^{inx} \\ &= \frac{h}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(nh)}{n} \left( \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) \\ &= \frac{h}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(nh)}{n} \cos(nx) \end{aligned}$$

Konvergiert überall gegen die Funktion außer an den Stellen  $-h$  und  $h$  und deren periodische Vielfache.

---

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} & , \text{ für } x \in [0, \pi) \\ \frac{1}{2} & , \text{ für } x = \pi \\ 0 & , \text{ für } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$


---

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{\pi} dx$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{\pi} \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \left[ \frac{x \sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left[ \frac{\cos(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi^2} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \frac{1}{\pi^2} \begin{cases} 0 & , \text{ für } k \text{ gerade} \\ \frac{-2}{\pi^2 k^2} & , \text{ für } k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{\pi} \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{x \cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$S(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

Konvergiert überall gegen die Funktion.

---

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \sin(x) & , \text{ für } x \in [0, \pi] \\ 0 & , \text{ für } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$


---

Es wird folgende Stammfunktion benötigt:

$$\begin{aligned}\int \sin(x) \cos(kx) dx &= \frac{\sin(x) \sin(kx)}{k} - \int \frac{\cos(x) \sin(kx)}{k} dx \\ &= \frac{\sin(x) \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(x) \cos(kx)}{k^2} + \frac{1}{k^2} \int \sin(x) \cos(kx) dx \\ \Leftrightarrow \int \sin(x) \cos(kx) dx &= \frac{k}{k^2 - 1} \sin(x) \sin(kx) + \frac{1}{k^2 - 1} \cos(x) \cos(kx)\end{aligned}$$

Dann sind die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx = \frac{2}{\pi} \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \frac{[(-1)^{k+1} - 1]}{k^2 - 1} \\ &= \begin{cases} \frac{-1}{\pi(4k^2 - 1)} & , \text{ für } k \text{ gerade} \\ 0 & , \text{ für } k \text{ ungerade} \end{cases} \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt die Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen ausgenutzt. Die Reihe lautet folglich:

$$S(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(kx)$$

Konvergiert überall gegen die Funktion.

---

d)  $f(x) = x^2$  für  $x \in [0, 2\pi)$

---

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3} \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos(kx) dx = -\frac{2}{\pi k} \int_0^{2\pi} 0x \sin(kx) dx \\
&= \frac{2}{\pi k^2} [x \cos kx]_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi k^2} \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx = \frac{4}{k^2} \\
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin(kx) dx = -\frac{1}{\pi k} [x^2 \cos(kx)]_0^{2\pi} + \frac{2}{\pi k} \int_0^{2\pi} x \cos(kx) dx \\
&= -\frac{4\pi}{k} - \frac{2}{\pi k^2} \int_0^{2\pi} \sin(kx) dx = -\frac{4\pi}{k} \\
S(x) &= \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} - 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}
\end{aligned}$$

Konvergiert überall gegen die Funktion.

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h} & , \text{ für } x \in (0, h] \\ 0 & , \text{ für } x \in [h, 2\pi) \\ \frac{1}{2} & , \text{ für } x = 0, 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^h dx = \frac{h}{\pi} \\
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^h \frac{h-x}{h} \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^h - \frac{1}{\pi h} \int_0^h x \sin(kx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1 - \cos(kh)}{k} + \frac{\cos(kh)}{k} - \frac{\sin(kh)}{k^2 h} \right] \\
&= \frac{1}{k^2 h \pi} [kh - \sin(kh)] \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^h \frac{h-x}{h} \sin(kx) dx = \frac{1}{k^2 \pi h} [1 - \cos(kh)] \\
S(x) &= \frac{h}{4\pi} + \frac{1}{\pi h} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (1 - \cos(kh)) \frac{\cos(kx)}{k^2} + (kh - \sin(kh)) \frac{\sin(kx)}{k^2} \right]
\end{aligned}$$

Konvergiert überall gegen die Funktion.

### 3 Einstieg Differentialgleichungen

Beweisen sie das Lemma (2.4) aus der Vorlesung.



Hinweis: Die Nummern 6,7 und 8 sind Folgerungen aus den ersten drei Aussagen.

---

a)

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} (A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{A^k B^{n-k}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \\ &= e^A e^B \end{aligned}$$

Hierbei wurde im zweiten Schritt die Binomialentwicklung benutzt (darf hier verwendet werden, da A und B kommutieren und die Summe daher umgeordnet werden kann), im dritten schritt die Definition des Binomialkoeffizienten eingesetzt wurde und im vierten Schritt das Cauchyprodukt rückwärts angewandt wurde.

b) Die Reihe darf gliedweise differenziert werden, da sie absolut konvergiert.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(tA)^{n-1}}{n!} A \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} A = e^{tA} A \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} e^{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_m^n) \\ &= \text{diag}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!}, \dots, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_m^n}{n!}\right) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_m}) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} e^{B^{-1}AB} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(B^{-1}AB)^n}{n!} = B^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} B \\ &= B^{-1} e^A B \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet das z.B.  $(B^{-1}AB)^2 = (B^{-1}AB)(B^{-1}AB) = B^{-1}A^2B$  gilt. Analog für n.

e) Folgt aus (1), da  $(A$  kommutiert mit  $-A)$

$$e^{A-A} = 1 = e^A e^{-A} \Rightarrow e^{-A} = (e^A)^{-1}$$

gilt.

f) Ebenfalls Folgerung aus (1), da A mit sich selbst kommutiert.

g)  $E$  kommutiert mit jeder Matrix und  $e^{\lambda E} = e^{\lambda} E$  nach (c).

---

## 4 Matrixexponentialfunktion I

Wie lautet die Matrixexponentialfunktionen  $f(t) = e^{tA}$  folgender Matrizen:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


---

Es wird mit E immer die passende Einheitsmatrix bezeichnet.

Wir zerlegen A in eine Diagonalmatrix und eine nilpotente Matrix, welche kommutieren:

$$A = A' + A'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow e^{tA} = e^{tA'} e^{tA''} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Die Matrix B ist nilpotent, die Exponentialreihe bricht also ab!

$$BB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^3 = 0$$

$$\Rightarrow e^{tB} = E + tB + \frac{t^2}{2}B^2$$

Die Matrix C kann in eine nilpotente und eine Diagonalmatrix geteilt werden.

$$C = E + C' = E + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Matrixexponentialfunktion als:

$$e^{tC} = e^{tE} e^{tC'} = e^t E \left[ E + t \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & (3t + 2t^2)e^t \\ 0 & e^t & 2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$


---

$$\text{b) } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$


---

Es gilt:

$$\sigma_2^2 = E$$

somit lässt sich schreiben:

$$e^{t\sigma_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} E + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \sigma_2$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(t) & -i \sinh(t) \\ i \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

Ein anderer Weg ist die Matrix unitär zu transformieren. Es gilt  $\sigma_2 = \sigma_2^*$ , d.h.  $\sigma_2$  ist hermitesch. Die Eigenwerten sind  $\lambda_{\pm} = \pm 1$  und die Eigenvektoren lauten:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die unitäre Matrix ergibt sich also als:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} e^{t\sigma_2} &= \frac{1}{2} U^* \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & i(e^t - e^{-t}) \\ -i(e^t - e^{-t}) & e^t + e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(t) & -i \sinh(t) \\ i \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Direkte Methode für A: Es gilt:

$$A^{2n} = (-1)^n E, \quad A^{2n+1} = (-1)^n A$$

Damit erhält durch Aufspalten der Exponentialreihe in gerade und ungerade Indizes:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} E + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} A \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Trickreiche Methode für A:  $X = iA$  ist hermitesch und es gilt  $X = \sigma_2$ . Nun gilt

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh(-it) & -i \sinh(-it) \\ i \sinh(-it) & \cosh(-it) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Für die Matrix B erhält man

$$\begin{aligned} B^{2n+1} &= (-1)^n 2^n B = (-1)^n \frac{(\sqrt{2})^{2n+1}}{\sqrt{2}} B \\ B^{2n} &= (-1)^{n-1} 2^{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} (-1)^n (\sqrt{2})^{2n} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{für } n > 0 \\ B^0 &= E \end{aligned}$$

Wie man mit vollständiger Induktion beweist.

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
 e^{tA} &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{2}t)^{2n} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{2}t)^{2n+1} B + E \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{2}t)^{2n} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{2}t)^{2n+1} B + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + E \\
 &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\cos(\sqrt{2}t) & \cos(\sqrt{2}t) & 0 \\ \cos(\sqrt{2}t) & -\cos(\sqrt{2}t) & 0 \\ 0 & 0 & -2\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin(\sqrt{2}t) \\ 0 & 0 & -\sin(\sqrt{2}t) \\ -\sin(\sqrt{2}t) & \sin(\sqrt{2}t) & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos(\sqrt{2}t)) & \frac{1}{2}(1 - \cos(\sqrt{2}t)) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) \\ \frac{1}{2}(1 - \cos(\sqrt{2}t)) & \frac{1}{2}(1 + \cos(\sqrt{2}t)) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) & \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

d)  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Wir zerlegen A in zwei kommutierende Matrizen:

$$A = a \cdot E + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich mittels der Lösung von (c) und  $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ :

$$e^{tA} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$$

## 5 Lösen von Differentialgleichungen mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

Lösen sie die folgenden Differentialgleichungen indem das charakteristischen Polynom aufstellen und die entsprechende Formel für die Lösung aus der Vorlesung verwenden.

a)  $\ddot{x} + \dot{x} - \dot{x} - x = 0$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Daraus liest man die Nullstelle  $\lambda_1 = 1$  ab. Durch Polynomdivision erhält man die Restgleichung:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Welche als Lösung nur  $\lambda_2 = -1$  hat. Daher ist  $\lambda_2$  zweifach entartet (die algebraische Vielfachheit ist vom Grade 2). Daher schreibt sich mit der Formel aus der Vorlesung:

$$x(t) = c_{11}e^t + c_{21}e^{-t} + c_{22}te^{-t}$$

b)  $\ddot{x} - 10\dot{x} + 25x = 0$

---

Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$$

Es hat nur die Lösung  $\lambda = 5$  die Nullstelle ist also zweifach entartet. Daher ergibt sich

$$x(t) = c_{11}e^{5t} + c_{12}te^{5t}$$

---

c)  $\ddot{x} + 3\dot{x} + 3x + x = 0$

---

Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

Es hat nur die Nullstelle  $\lambda = -1$ , diese ist folglich dreifach entartet. Damit ergibt sich die Lösung:

$$x(t) = c_{11}e^{-t} + c_{12}te^{-t} + c_{13}t^2e^{-t}$$

---

## 6 Spezielle Lösungen von Differentialgleichungen

a) Gegeben sei die Differentialgleichung  $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = e^{imt}$ , wobei  $m \in \mathbb{Z}$  und  $\omega_0 > \gamma$ .

i. Schreiben Sie die DGL in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung um.

---

Wir definieren:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

Damit schreibt sich die DGL

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

---

ii. Stellen Sie das charakteristische Polynom auf und lösen sie die homogene Differentialgleichung.

---

Das charakteristische Polynom lautet:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Dieses hat die Lösung

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega$$

Die Wurzel ist wegen der Voraussetzung  $\omega_0 > \gamma$  rein reell. Diesen Fall bezeichnet man als Schwingfall. Der Oszillator führt periodische Schwingungen aus, deren Amplitude auf Grund der Dämpfung immer kleiner wird (Dämpfungskonstante  $\gamma$ ). Weiterhin setzen wir  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ .

---

- iii. Versuchen Sie mittels Fourierreihenansatz eine spezielle Lösung zu berechnen und geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung an.

Wir setzen den Ansatz

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int}$$

in die Differentialgleichung ein und erhalten (die rechte Seite ist bereits in eine Fourierreihe entwickelt; die Koeffizienten verschwinden alle bis auf einen):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \{(ik)^2 + 2i\gamma k + \omega_0^2\} \hat{f}_n e^{int} = e^{imt}$$

Die Reihe darf hier gliedweise differenziert werden, da für eine gültige Lösung  $x_s(t) \in C^{(2)}$  gelten muss. Durch Koeffizientenvergleich erhält man:

$$\hat{f}_k = 0, \text{ für } k \neq m, \hat{f}_m = \frac{1}{\omega_0^2 - m^2 + 2i\gamma m}$$

Somit erlangt man durch Einsetzen in den Ansatz die Lösung:

$$x_s(t) = \frac{e^{imt}}{\omega_0^2 - m^2 + 2i\gamma m}$$

Wie man durch Einsetzen in die DGL leicht überprüft. Die Allgemeine Lösung lautet nun:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) + \frac{e^{imt}}{\omega_0^2 - m^2 + 2i\gamma m}$$

- b) Betrachten Sie folgendes AWP:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist die allgemeine Lösung dieses AWP. Prüfen Sie Ihr Ergebnis darauf, ob es die Anfangsbedingungen und die Differentialgleichung erfüllt.

Zunächst löst man das homogene Problem. Zwecks dessen zerlegen wir die Matrix  $A$  in einen Diagonalmatrix und eine nilpotente Matrix:

$$A = 2 \cdot E + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung für die Matrixexponentialfunktion lautet daher (die beiden Matrizen kommutieren)

$$e^{tA} = e^{2t} \left( E + t \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -2te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir eine spezielle Lösung der Differentialgleichung mittels der Variation der Konstanten (die Inverse Matrix  $e^{-tA}$  erhält man hier aus der ursprünglichen durch die Variablentransformation  $t \mapsto -t$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s(t) &= e^{tA} \int_0^t e^{-tA} b(s) ds = e^{tA} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2s} & 2se^{-2s} \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} ds \\ &= e^{tA} \int_0^t \begin{pmatrix} se^{-2s} \\ 0 \end{pmatrix} ds = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{2t} & -2te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - e^{-2t}(2t+1) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{2t} - (2t+1) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

---

c) Gegeben ist sind folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -y_2 + v \cos(t) \\ \dot{y}_2 &= y_1 + v \sin(t)\end{aligned}$$

Lösen Sie diese gekoppelten Differentialgleichungen einmal unter den Anfangsbedingungen  $y_1(0) = l$ ,  $y_2(0) = 0$  und einmal für  $y_1(0) = l_1$ ,  $y_2(0) = l_2$ . Wie sehen die Lösungskurven aus?

---

Zunächst schreiben wir das System in das gewohnte Bild des Matrizen-Kalküls:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + v \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Matrix-Exponential haben wir schon weiter oben berechnet. Es lautet:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Die spezielle Lösung erhalten wir mittels der Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_s(t) &= e^{tA} \int_0^t v \cdot e^{-sA} \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \int_0^t v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} t \cos(t) \\ t \sin(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

wobei die Inverse Matrix

$$e^{-tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

benutzt wurde. Als allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich nun durch

$$\mathbf{x}(t) = (l + vt) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Für die Anfangsbedingungen  $y_1(0) = l_1$ ,  $y_2(0) = l_2$  ergibt sich die Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)(l_1 + vt) - l_2 \sin(t) \\ \sin(t)(l_1 + vt) + l_2 \cos(t) \end{pmatrix}$$

---

d) Schreiben Sie die folgenden Differentialgleichungen in Systeme erster Ordnung und lösen das System, indem sie das Matrix-Exponential berechnen.

$$\ddot{x} - \kappa^2 x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1$$

---

Mit  $\mathbf{y} = (x, \dot{x})$  ergibt sich:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} = A\mathbf{y}$$

Das Matrixexponential berechnet man durch die Aufspaltung in gerade und ungerade Indizes

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\kappa)^{2n}}{(2n)!} E + \frac{1}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\kappa)^{2n+1}}{(2n+1)!} B \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\kappa t) & \frac{1}{\kappa} \sinh(\kappa t) \\ \kappa \sinh(\kappa t) & \cosh(\kappa t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Einarbeiten der Anfangsbedingungen liefert:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \cosh \kappa t + \frac{1}{\kappa} \sinh(\kappa t) \\ \kappa \sinh \kappa t + \cosh(\kappa t) \end{pmatrix}$$

---