Ferienkurs Höhere Mathematik 2

Wintersemester 2008/2009

Übungen **Fourierreihen und Differentialgleichungen** Blatt 5

0 Fourierkoeffizienten und Orthonormalsysteme

a) Sei f eine gerade Funktion, d.h. es gilt $f(-x) = f(x)$. Was kann man über die reellen Fourierkoeffizienten aussagen. Was kann man sagen, wenn die Funktion ungerade ist, d.h. wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt?

b) Es wird häufig benutzt, dass bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten nur die Länge des Integrationintervalls ausschlaggebend ist, dagegen ist es unwichtig, wo die Grenzen liegen. Beweisen Sie dies, indem Sie zeigen, dass gilt:

$$\int\limits_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)e^{-ikx}dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \text{ , für } a \in \mathbb{R}$$

c) Wie lauten die komplexen Fourierkoeffizienten der folgenden Funktionen:

  i. $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$

  ii. $f(x) = \sin^2(x)$, $f(x) = \sin^3(x) + \cos^2(x)$

d) Zeigen sie, dass die Menge $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem bzgl. des in der Vorlesung eingeführten Skalarproduktes über $\mathfrak{R}$. Folgern sie daraus, dass die Menge

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\} \cup \{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \cup \{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$$

bezüglich des Skalarproduktes $\langle f,g\rangle = \int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ ebenfalls ein Orthonormalsystem ist.

Hinweis: Beim zweiten Teil hilft das Umschreiben der trigonometrischen Funktionen in die komplexe Form weiter.

1 Fourierreihen I

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die 2π-periodische Funktion, welche aus der periodischen Fortsetzung der Funktion $f(x) = \exp(ax)$, mit $x \in (-\pi,\pi]$ und $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, entsteht. Entwickeln Sie f in eine Fourierreihe.

b) Sei $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, mit $f(x) = \cos(ax)$ und $g(x) = \sin(ax)$ für $x \in [-\pi,\pi]$. Bestimmen Sie die Fourierreihe von g und f.

Hinweis: Mit einer geeigneten Wahl für $a \in \mathbb{C}$ kann man die Fourierreihen ohne große Rechnung mit Hilfe von Aufgabenteil (a) erhalten.

c) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} f(x) = x$ für $x \in [-\pi,\pi]$.

d) Die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch $\hat{f}_0 = \frac{\pi^2}{6}$ und $\hat{f}_k = \frac{(-1)^k}{k^2}$, $k \neq 0$. Sei f eine Stammfunktion zu einer Funktion g. Wie lauten die Fourierkoeffizienten von g? Wie lautet eine Funktion f, welche die Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k$ hat und für die $f(0) = 0$ gilt? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch die explizite Berechnung der Fourierkoeffizienten von f!

2 Fourierreihen II

Im folgenden sollen einige Fourierreihe aus vorgegebenen Funktionen berechnet werden, dabei wird die Funktion in einem bestimmten Intervall definiert und die periodisch fortgesetzte Funktion soll entwickelt werden. An welchem Stellen konvergiert die Fourierreihe gegen die entwickelte Funktion?

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, für } x \in (-h, h) \\ 0 & \text{, für } x \in [-\pi, -h] \cup [h, \pi] \end{cases} \qquad h \in [-\pi, \pi]$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} & \text{, für } x \in [0, \pi) \\ \frac{1}{2} & \text{, für } x = \pi \\ 0 & \text{, für } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{, für } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{, für } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$

d) $f(x) = x^2$ für $x \in (0, 2\pi)$

e) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h} & \text{, für } x \in (0, h] \\ 0 & \text{, für } x \in [h, 2\pi) \\ \frac{1}{2} & \text{, für } x = 0, 2\pi \end{cases}$

3 Einstieg Differentialgleichungen

Beweisen sie das Lemma (2.4) aus der Vorlesung.

Hinweis: Die Nummern 6,7 und 8 sind Folgerungen aus den ersten drei Aussagen.

4 Matrixexponentialfunktion

Wie lautet die Matrixexponentialfunktionen $f(t) = e^{tA}$ folgender Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

5 Lösen von Differentialgleichungen mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

Lösen sie die folgenden Differentialgleichungen indem das charakteristischen Polynom aufstellen und die entsprechende Formel für die Lösung aus der Vorlesung verwenden.

a) $\dddot{x} + \ddot{x} - \dot{x} - x = 0$

b) $\ddot{x} - 10\dot{x} + 25x = 0$

c) $\dddot{x} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + x = 0$

6 Spezielle Lösungen von Differentialgleichungen

a) Gegeben sei die Differentialgleichung $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = e^{imt}$, wobei $m \in \mathbb{Z}$ und $\omega_0 > \gamma$.

   i. Schreiben Sie die DGL in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung um.

   ii. tellen Sie das charakteristische Polynom auf und lösen sie die homogene Differentialgleichung.

iii. Versuchen Sie mittels Fourierreihenansatz eine spezielle Lösung zu berechnen und geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung an (ohne Einarbeitung der Anfangsbedingungen).

b) Betrachten Sie folgendes AWP:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist die allgemeine Lösung dieses AWPs. Prüfen Sie Ihr Ergebnis darauf, ob es die Anfangsbedingungen und die Differentialgleichung erfüllt.

c) Gegeben ist sind folgende Differentialgleichungen:

$$\dot{y}_1 = -y_2 + v\sin(t)$$
$$\dot{y}_2 = y_1 + v\cos(t)$$

Lösen Sie diese gekoppelten Differentialgleichungen einmal unter den Anfangsbedingungen $y_1(0) = l \ , \ y_2(0) = 0$ und einmal für $y_1(0) = l_1 \ , \ y_2(0) = l_2$.

d) Schreiben Sie die folgenden Differentialgleichungen in Systeme erster Ordnung und lösen das System, indem sie das Matrix-Exponential berechnen.

$\ddot{x} - \kappa^2 x = 0 \ , \ x(0) = 1, \ \dot{x}(0) = 1$