

# Vorlesung Fourierreihen und Gewöhnliche Differentialgleichungen

Ferienkurs Höhere Mathematik 2 (Analysis 1)

Wintersemester 2008/09

06.03.2009

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Fourierreihen</b>	<b>2</b>
1.1	Skalarprodukt und Definition der Fourierkoeffizienten . . . . .	2
1.2	Eigenschaften und Rechenregeln . . . . .	4
1.3	Punktweise Konvergenz und Konvergenz im quadratischen Mittel . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Lineare Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>6</b>
2.1	Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen . . . . .	6
2.2	Matrixexponentialfunktion und Lösung der homogenen DGL . . . . .	7
2.3	Fundamentalsystem und inhomogene Systeme . . . . .	9

# 1 Fourierreihen

## 1.1 Skalarprodukt und Definition der Fourierkoeffizienten

**Definition 1.1: Skalarprodukt:** Ein Skalarprodukt ist eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  von einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $X$  in den Körper der komplexen Zahlen, für die gilt ( $f, g, h \in X, \lambda \in \mathbb{C}$ )

1.  $\langle f, f \rangle \geq 0$
2.  $\langle \lambda(f + g), h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \lambda \langle g, h \rangle$
3.  $\overline{\langle f, g \rangle} = \langle g, f \rangle$

**Definition 1.2: Periodische Funktionen:** Man nennt eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f = f(x)$  periodisch mit der Periode  $T$ , wenn gilt

$$f(x) = f(x + T) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Im folgenden sei mit  $\mathfrak{R}$  der Vektorraum der  $2\pi$ -periodischen, Riemann-integriblen Funktionen  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  bezeichnet. Man definiert in der Regel auf diesem Raum das Skalarprodukt durch:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (1)$$

wobei  $f, g \in \mathfrak{R}$ . Des weiteren definiert man

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle \quad (2)$$

wobei  $\|\cdot\|: \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty)$  eine Halbnorm ist.

**Hinweis (Definition Halbnorm)** Eine Halbnorm ist eine Abbildung aus einem Vektorraum  $X$  in die positiven reellen Zahlen, also  $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$  mit den Eigenschaften ( $f, g \in X, \lambda \in \mathbb{C}$ ):

1.  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
2.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Eine Norm lässt sich auf dem hier betrachteten Raum  $\mathfrak{R}$  auf diese Weise nicht einführen.

**Satz 1.3 (Cauchy-Schwartzsche Ungleichung)**  $\forall f, g \in \mathfrak{R}$  gilt:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad (3)$$

Da für die Funktionen  $e_n(x) = e^{inx}$  die Relation  $\langle e_n, e_k \rangle = \delta_{n,k}$  gilt, nennt man die Menge  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Orthonormalsystem. Die Fourierreihen, welche im folgenden betrachtet werden, stellen eben eine Entwicklung nach diesem Funktionensystem dar, wobei die Koeffizienten die Informationen über die Funktion tragen. Das entscheidende Problem ist dann allerdings noch die fragliche Konvergenz der Reihenentwicklung und in wie fern die Fourierreihe der entwickelten Funktion äquivalent ist.

**Definition 1.4: Fourierkoeffizienten:** Mit den oben definierten Konventionen schreibt man für  $f \in \mathfrak{R}$ :

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (4)$$

Man kann sich eine Funktion als einen Vektor, welcher hier unendlichdimensional ist, im Funktionenraum  $\mathfrak{R}$  vorstellen. Die Menge  $e_n$  bildet eine Basis in diesem Raum, und der Fourierkoeffizient  $\hat{f}(n)$  ist die  $n$ -te Komponente dieses Vektors. Dieser Analogie folgend kann man Funktionen als Linearkombination der Basisvektoren auffassen und man kann Partialsummen folgender Art bilden:

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e_k(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx}$$

Diese Summe nennt man trigonometrische Polynom. Weiter unten wird angegeben, wann  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  gilt. Im Falle der Konvergenz nennt man

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(n) e^{ikx}$$

die Fourierreihe (oder Fourierentwicklung) von  $f$ . Die "doppelte" Reihe, welche hier verwendet wird, ist dabei sehr naheliegend definiert. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n g_k &= g_0 + \sum_{k=-n}^{-1} g_k + \sum_{k=1}^n g_k \\ &= g_0 + \sum_{k=1}^n (g_k + g_{-k}) \end{aligned}$$

was der bisher gewohnten Notation entspricht.

Die Fourierentwicklung kann man auch rein reell durchführen. Hierzu entwickelt man die Funktion  $f$  nach den Orthogonalsystem der trigonometrischen Funktionen  $\{\sin(nx)\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \cup \{\cos(nx)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Mit Hilfe der Eulergleichung

$$e^{ix} = \sin(x) + i \cos(x)$$

ergibt sich dann aus der Definition der komplexen Fourierkoeffizienten folgende Darstellung für die reellen Fourierkoeffizienten:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \text{ für } k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

und die Reihe schreibt sich (im Falle der Konvergenz) als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\} \quad (7)$$

Obwohl zwei Sätze von Koeffizienten berechnet werden müssen, existieren nicht mehr Koeffizienten als im komplexen Fall, da in der komplexen Formulierung sich der Index über ganz  $\mathbb{Z}$  erstreckt, im Reellen aber  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  und  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  gilt. Hier erstreckt sich die Summe also nur über die natürlichen Zahlen.

Je nachdem was günstiger zu rechnen ist, wählt man entweder die komplexe oder die reelle Schreibweise. Die Ergebnisse sind erwartungsgemäß die selben!

**Beispiel (Berechnung einer Fourierreihe):** Gegeben sei die  $2\pi$ -periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ für } x \in [0, \pi) \\ -1 & , \text{ für } x \in (-\pi, 0) \\ 0 & , \text{ für } x = k\pi \text{ und } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Einsetzen in die komplexe Definition der Fourierkoeffizienten ergibt

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} e^{-ikx} dx - \int_{-\pi}^0 e^{-ikx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (e^{-ikx} - e^{ikx}) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{2}{i} \sin(kx) dx \\ &= \frac{1}{i\pi} \left[ \frac{\cos(kx)}{k} \right]_{\pi}^0 = \begin{cases} \frac{2}{\pi k i} & , \text{ für } k \in 1 + 2\mathbb{Z} \text{ (} k \text{ ungerade)} \\ 0 & , \text{ für } k \in 2\mathbb{Z} \text{ (} k \text{ gerade)} \end{cases} \end{aligned}$$

Hierbei musste beachtet werden, dass  $\cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & , \text{ für } k \in 2\mathbb{Z} \\ -1 & , \text{ für } k \in 1 + 2\mathbb{Z} \end{cases}$  gilt. Einsetzen in die Fourierreihe ergibt

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi i(2k+1)} e^{ikx} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)} \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots \right) \end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe berechnet. Wann diese mit  $f(x)$  übereinstimmt können wir weiter unten beantworten.

## 1.2 Eigenschaften und Rechenregeln

Wichtig für die Konvergenzeigenschaften der Fourierreihen ist die sogenannte Minimaleigenschaft der Fourierpolynome.

**Satz 1.5 (Minimaleigenschaften der Fourierpolynome):** Sei  $f \in \mathfrak{R}$ , dann gilt mit der Halbnorm  $\|\cdot\|_2$  von oben:

$$\|f - S_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2 \quad (8)$$

Diese Eigenschaft wird im Nächsten Abschnitt von großen Wert sein.

Im Allgemeinen ist es äußerst nützlich, das Verhalten von Funktionen im unendlichen zu kennen. Das folgende Lemma zeigt, dass die Fourierkoeffizienten im unendlichen Verschwinden.

**Lemma 1.6 (Riemann-Lebesgue):** Sei  $f \in \mathfrak{R}$  und  $k \in \mathbb{Z}$  dann gilt:

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0 \quad (9)$$

oder alternativ

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} = 0$$

**Beweis:** Dies folgt aus der Minimaleigenschaft der Fourierpolynome und der Tatsache, dass die Glieder einer (konvergenten) Reihe eine Nullfolge bilden.

**Lemma 1.7 (Ableitung der Fourierkoeffizienten):** Sei  $f \in C^n[-\pi, \pi]$  und  $2\pi$ -periodisch, dann gilt

$$\widehat{\left( \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right)}(k) = (ik)^n \hat{f}(k)$$

Des weiteren erhält man die Abschätzung

$$\exists C > 0 : \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad |\hat{f}(k)| \leq \frac{M}{|k|^n}$$

### 1.3 Punktweise Konvergenz und Konvergenz im quadratischen Mittel

Dieser Abschnitt soll nur dazu dienen kurz die wichtigen Konvergenzsätze für Fourierreihen zusammenzustellen. Es ist prinzipiell zwischen zwei verschiedenen Konvergenzbegriffen zu unterscheiden:

1. Punktweiser Konvergenz
2. Konvergenz im quadratischen Mittel

Zunächst wenden wir uns der punktweisen Konvergenz der Fourierreihe

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$$

zu. Hierbei bildet der folgende Satz die Grundlage. Es sei  $f(x\pm)$  der rechtsseitige, bzw. linksseitige Limes.

**Satz 1.8 :** Sei  $f$  stückweise stetig differenzierbar, dann konvergiert die Fourierreihe punktweise, und es gilt  $\forall x \in (-\pi, \pi)$

$$S(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

Falls also  $f$  in  $x$  stetig ist, so gilt  $S(x) = f(x)$ , da hier auf Grund der Definition der Stetigkeit linksseitiger und rechtsseitiger Limes zusammenfallen.

**Beispiel (Verhalten an Unstetigkeitsstelle):** Betrachten wir die Sägezahnfunktion  $f(x) = x$ , für  $x \in [0, 2\pi)$ . Die Fourierentwicklung dieser Reihe (für Sie die explizite Berechnen als Übung selbst durch) lautet:

$$S(x) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

Es gilt also  $S(0) = \pi$ . Genau das selbe Ergebnis erhalten wir aber auch aus dem Satz. Dieser sagt uns voraus, dass die Reihe das arithmetische Mittel aus linkseitigem und rechtsseitigem Grenzwert sein wird. Es gilt nun  $f(x+) = 0$  und  $f(x-) = 2\pi$ , also wiederum  $S(0) = \pi$ . Dies gilt für alle Vielfachen von  $2\pi$ , wie man sich wegen der periodischen Fortsetzung klar macht. Also konvergiert diese Fourierreihe an allen Stellen  $x = 2\pi k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  nicht gegen die Funktion  $f(x) = x$ , da diese auf dem Intervall  $[0, 2\pi)$  definiert wurde und daher  $f(0) = 0$  gilt. Für  $\mathbb{R} \setminus \{2\pi k ; k \in \mathbb{Z}\}$  stimmen die Reihe und die Funktion überein, da  $f(x)$  hier stetig ist.

Man kann sogar stetige Funktionen konstruieren, deren Fourierreihe divergiert. Daran sieht man, dass die Voraussetzung der stückweise stetigen Differenzierbarkeit nicht fallen gelassen werden kann. Diese sind aber i.A. nicht einfach zu finden. Bei Interesse siehe auch Königsberger I Kapitel (16.4).

**Definition 1.9 (Konvergenz im quadratischen Mittel):** Eine Folge von Funktionen  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f_n \in \mathfrak{R} \forall n \in \mathbb{N}$  heißt im quadratischen Mittel konvergent, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0$$

gilt, wobei  $\|\cdot\| : \rightarrow \mathbb{R}^+$  die Halbnorm (2) ist.

**Satz 1.10 (Konvergenz der Fourierpolynome im quadratischen Mittel):** Für alle Funktionen aus dem Raum  $\mathfrak{R}$  gilt für die Fourierpolynome  $S_n(x)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - f\|_2 = 0$$

Hieraus folgt mit der Minimaleigenschaft der Fourierpolynome, die sogenannte Parsevallsche Identität:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2$$

Diese Gleichung gibt die sehr wichtige Information preis, dass für eine Funktion endlicher Norm  $\|f\|_2 < \infty$  die Reihe absolut konvergiert! Da die Funktionen  $f \in \mathfrak{R}$  allesamt Riemann-integrabel sind, ist dies auf

jeden Fall erfüllt. Auf dem Raum  $\mathfrak{R}$  mit dem Skalarprodukt  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  ist also die Konvergenzfrage der Fourierreihen bzgl. Konvergenz im quadratischen Mittel gelöst.

Der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Konvergenzbegriffen (es gibt derer vieler in der Mathematik) ist der Gültigkeitsbereich ihrer Aussagekraft. Während die punktweise definierte Begriff ermöglicht für einzelne Stellen die Reihe explizit zu berechnen, gibt die Konvergenz im quadratischen Mittel eine globale Aussage über die Konvergenz der Reihe bezüglich einer gewissen Norm auf einen bestimmten Funktionenraum. Allerdings lässt sich aus der Konvergenz im quadratischen Mittel keine Aussage über die Konvergenz der Reihe an einem bestimmten Punkt machen. Man kann sich selbst schnell davon überzeugen. Wenn man den Wert der Reihe an nur einem Punkt beliebig verändert, so hat dies keine Auswirkung auf den Wert des Integrals, welches in der Halbnorm-Definition vorkommt. Somit konvergiert die modifizierte Reihe immer noch gegen die selbe Funktion im quadratischen Mittel (!), die Reihen sind aber nicht mehr identisch. Es ist ersichtlich, dass man die Reihe an abzählbar vielen Stellen beliebig ändern kann, ohne die Konvergenz im quadratischen Mittel zu beeinflussen.

## 2 Lineare Gewöhnliche Differentialgleichungen

### 2.1 Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen

Als eine gewöhnliche DGL bezeichnet man eine Gleichung der Form (explizite Darstellung)

$$x^{(n)}(t) = F(x^{(n-1)}(t), \dots, x(t), t)$$

wobei  $x : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion mit der Variablen  $t$  ist. In einer gewöhnlichen Differentialgleichung treten nur einfache Ableitung, keine partiellen Ableitungen auf. Eine DGL nennt man linear, falls man sie so umschreiben kann, dass

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_0(t) \cdot y(t) = b(t) \quad (10)$$

mit  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $a_j(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  gilt. Die Funktion  $b(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nennt man Inhomogenität. Falls  $b(t) = 0$  gilt, so nennt man die DGL homogen, anderenfalls inhomogen. Im Allgemeinen sind die Koeffizienten abhängig vom Parameter  $t$ .

**Beispiel (Harmonischer Oszillator):** Ein klassisches Beispiel einer linearen DGL ist der harmonische Oszillator, sie lautet

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos(\Omega t) = F(t)$$

Sie ist ein Beispiel für eine mit der Kraft  $F$  angetriebene Schwingung (Masse auf eins normiert).

Im folgenden werden vektorwertige Funktionen bzgl. des Parameters  $t$  abgeleitet und integriert. Diese Operationen sind immer komponentenweise definiert, d.h. die Ableitung eines Vektor ist gleich einem neuen Vektor, welcher die Ableitungen der Komponenten des alten Vektors enthält. Analoges gilt für die Integration. Daher lässt sich leicht zeigen, dass es zum eindimensionalen analoge Rechenregeln gibt (machen sie sich z.B. klar, dass die Produktregel gilt). Dieselben Definitionen gelten auch für Matrizen, also

$$A'(t) = (A'_{ij}(t)), \quad \int A(t)dt = \left( \int A_{ij}(t)dt \right)$$

Als Systeme von DGL bezeichnet man

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (11)$$

mit den vektorwertigen Funktionen  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  und  $\mathbf{b}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , sowie der matrixwertigen Funktion  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ . Für diese Systeme wollen wir in den folgenden Abschnitten Lösungsmethoden bereitstellen.

Jede DGL in der Darstellung (10) lässt sich in ein System von Differentialgleichungen überführen, so dass die entstehende DGL nur noch ersten Grades ist. Zu diesem Zwecke muss man die Komponenten aus (11)

folgendermaßen wählen:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \quad (12)$$

Dadurch lassen sich alle Probleme von DGL'n höhere Grade auf die von DGL'n ersten Grades (jetzt im Matrizenkalkül geschrieben) übertragen. Im folgenden werden nur noch DGL'n ersten Grades in der vektoriellen Form betrachtet. Die dafür bereitgestellten Methoden gelten nach der obigen Ausführung allgemein.

**Beispiel (harmonischer Oszillator):** Es sei  $\mathbf{y} = (x, \dot{x})$  (beachten Sie die hier gewählte Konvention, welche auch im Semester getroffen wurde: Das Komma deutet an, dass dieser Vektor als Spaltenvektor zu verstehen ist!), dann gilt:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 e^{i\Omega t} \end{pmatrix}$$

Beachtet man die Konventionen (12), dann braucht man nur einzusetzen.

Wenn ein System von DGL der Form (11) gegeben ist, so nennt man die Funktion  $\mathbf{x}(t)$  eine Lösung dieses Systems. Im allgemeinen sind die Koeffizienten abhängig vom Parameter  $t$ , aber solche DGL lassen sich nur in Ausnahmefällen geschlossen lösen. Daher werden im weiteren nur lineare, gewöhnliche DGL-Systeme mit Konstanten Koeffizienten betrachtet, also  $a_j = \text{konst. } \forall j$ . Hierfür lassen sich immer geschlossene Lösungen angeben.

## 2.2 Matrixexponentialfunktion und Lösung der homogenen DGL

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , dann definiert man

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \quad (13)$$

Dazu setzt man  $A^0 = E_n$  mit der  $n$ -dim. Einheitsmatrix  $E_n$ . Die Matrixexponentialfunktion hat einige wichtige Eigenschaften

**Lemma 2.1 (Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion):** Sei  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$

1. Falls  $AB = BA$ , dann gilt  $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$
2. Es gilt  $\frac{d}{dt} e^{tA} = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A$
3. Wenn mit  $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  die  $n$ -dim. Diagonalmatrix mit den Einträgen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  bezeichnet wird, dann gilt  $e^{\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$
4.  $e^{B^{-1}AB} = B^{-1}e^A B$ , falls  $\det(B) \neq 0$
5.  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
6.  $e^{(s+t)A} = e^{sA} \cdot e^{tA}$
7.  $e^{A+\lambda E} = e^\lambda \cdot e^A$

**Definition 2.2 (Operatornorm):** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , dann ist

$$\|A\|_0 := \sup_{v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Av\| \quad (14)$$

eine Norm auf dem Raum der quadratischen, komplexen Matrizen. Aus dem Semester ist bekannt das dieser Raum vollständig bzgl. (!) dieser Norm ist.

**Lemma 2.3 :** Sei  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$

1. Submultiplikativität  $\|AB\|_0 \leq \|A\|_0 \|B\|_0$
2. Äquivalenz der Maximumsnorm mit der Operatornorm ( $m \in \mathbb{R}$ )

$$\max_{k,l} |A_{k,l}| \leq \|A\|_0 \leq m \cdot \max_{k,l} |A_{k,l}|$$

Man kann mit dieser Norm und der Submultiplikativität zeigen, dass die Matrixexponentialfunktion auf jedem beschränktem Intervall für  $t$  absolut konvergiert (gute Übung).

**Satz 2.4 (Lösung des Anfangswertproblems)** Gegeben sei das homogene System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \tag{15}$$

Dann lautet die eindeutige Lösung dieses Anfangswertproblems (AWP)

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0$$

Damit ist die Lösung des Problems auf die explizite Berechnung der Matrixexponentialfunktion übertragen worden, und im folgenden wird dargestellt wie man sie in bestimmten Fällen lösen kann.

**Beispiel (Harmonischer Oszillator):** Mit Hilfe dieses Satzes sind wir nun in der Lage die homogene DGL des harmonischen Oszillators zu lösen. Es gilt hier speziell:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine direkte Methode die manchmal zum Ziel führt, ist die Aufteilung der Matrixexponentialfunktion in einzelne Summen, so dass sich diese explizit berechnen lassen. Hierfür gibt es kein allgemeines Verfahren. Man benötigt dafür ein wenig Erfahrung um zu erkennen, wann dies funktioniert. Durch Matrixmultiplikation erhält man die Relationen (Der Beweis dieser Gleichungen würde über vollständige Induktion erfolgen. Übung!):

$$A^{2n} = (-1)^n \omega^{2n} E \quad \text{und} \quad A^{2n+1} = \frac{1}{\omega} (-1)^n \omega^{2n+1} A$$

Die Matrix weist also bei der Multiplikation eine gewisse "Periodizität" auf. Dies ist der Schlüssel zu der hier vorgestellten Methode. Die Berechnung des Exponentials erfolgt nun als Aufteilung der Summe in gerade und ungerade Indizes:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} A^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1} A^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n} \omega^{2n}}{(2n)!} \cdot E_n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1} \omega^{2n+1}}{\omega \cdot (2n+1)!} \\ &= \cos(\omega t) \cdot E_n + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \cdot A = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin \omega t & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist das homogene Problem vollständig gelöst. Was hier übertrieben wirkt (weiter unten werden wir sehen, dass die Lösung auch einfacher zu erhalten ist), soll nur als Beispiel dienen, häufig ist dies der einzig adäquate Weg, ein DGL-System zu lösen. Wählen wir nun noch als Anfangsbedingung  $y_0 = (1, \omega)$  so erhalten wir das Ergebnis

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \\ \omega(-\sin(\omega t) + \cos \omega t) \end{pmatrix}$$

Eine Grundsätzliche Methode zur Berechnung der Matrixexponentialfunktion bietet die Transformation der Matrix in Diagonalform mittels unitärer Matrizen. Dies ist nicht immer möglich, aber immer dann, wenn die betrachtete Matrix selbstadjungiert (hermitesch) ist.



**Rechenmethode (Berechnung mittels Diagonalisierung hermitescher Matrizen):** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine hermitesche, bzw. selbstadjungierte Matrix, d.h.  $A = A^*$ , wobei  $*$  die hermitesche Konjugation bedeutet (in Komponenten schreibt sich dies  $(A_{i,j})^* = (\overline{A_{j,i}})$ ). Dann gibt es eine unitäre Matrix  $U$ , so dass gilt  $\tilde{A} = U^*AU$ . Eine Matrix nennt man unitär, wenn  $UU^* = U^*U = E_n$  gilt und es bezeichne  $\tilde{A}$  die Diagonalmatrix von  $A$ . Wenn wir die Eigenwerte von  $A$  mit  $\lambda_i$  bezeichnen, und annehmen, dass alle Eigenwerte einfach sind, dann lässt sich schreiben:

$$e^A = S e^{\tilde{A}} S^* = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} S^*$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man die Matrixexponentialfunktion und damit die Lösung der homogenen Gleichung. Eine quadratische  $n \times n$ -Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn es  $n$  linear-unabhängige Eigenvektoren gibt. Wie schon erwähnt ist dies für  $A = A^*$  immer gewährleistet, man braucht sich hier um dieses Problem also keine Gedanken zu machen. Im Allgemeinen sind die Eigenwerte natürlich nicht einfach, sondern es existieren mehrere Eigenvektoren zu ein und demselben Eigenwert, oder anders gesprochen der Eigenraum  $\text{Eig}(A, \lambda_i)$  hat eine Dimension größer eins. Dann tauchen die Exponentialfunktionen mit dem selben Eigenwert so häufig auf wie der Eigenwert entartet ist.

Um die unitären Matrizen zu erhalten, berechnet man zunächst die Eigenwerte der Matrix, dann zu jedem Eigenwert die Eigenvektoren. Die Eigenvektoren aller Eigenwerte bilden dann die Spalten der unitären Matrix.

Diese Methode lässt sich auf alle diagonalisierbaren Matrizen anwenden (nicht nur auf  $A = A^*$ ). Im allgemeinen Fall einer beliebigen Matrix muss man die Matrix durch eine Jordanzerlegung auf die Jordanform bringen und dann die Einzelne Matrixexponentialfunktionen mit den Jordanblöcken auswerten.

## 2.3 Fundamentalsystem und inhomogene Systeme

Wir gehen wiederum von der homogenen, linearen DGL (15)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$$

aus und betrachten zwei Lösungen  $\mathbf{x}_1(t)$  und  $\mathbf{x}_2(t)$ . Dann ist  $\mathbf{y}(t) = c_1 \cdot \mathbf{x}_1(t) + c_2 \cdot \mathbf{x}_2(t)$ ,  $c_1$  und  $c_2 \in \mathbb{C}$  ebenfalls eine Lösung von (15). Dies ist eine charakteristische Eigenschaft von linearen DGL und man diese Eigenschaft Superpositionsprinzip. Daher ist der Raum der Lösungen ein (hier komplexer) Vektorraum der nach den Ergebnissen aus der linearen Algebra eine Basis besitzt. Diese Basis nennt man Fundamentalsystem.

Falls uns die DGL in der inhomogenen Form (11) begegnet, müssen wir uns eben dieses Superpositionsprinzip zu nutze machen. Zunächst berechnet man die allgemeine Lösung der homogenen Lösung und addiert hierzu eine spezielle Lösung der kompletten inhomogenen Lösung. Oben hatten wir Verfahren angegeben um die homogene Lösung zu bestimmen. Sei  $\mathbf{x}(t)$  allgemeine Lösung der inhomogenen DGL und  $\mathbf{x}_s(t)$  die spezielle Lösung, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &:= \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) - A(t)\mathbf{x}_s(t) - \mathbf{b}(t) = A(t)\mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

somit ist  $\mathbf{y}(t)$  eine Lösung der homogenen DGL. Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL die Form  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_s(t)$  hat.

Ein allgemeines Verfahren um eine inhomogene DGL speziell zu lösen ist die sogenannte Variation der Konstanten.

**Rechenmethode (Variation der Konstanten):** Die Lösung der homogenen Gleichung hat immer die Form  $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$ , mit  $c \in \mathbb{C}^n$ . Der Trick besteht jetzt darin, die "Konstante" als Abhängig von der Zeit

anzunehmen und den Ansatz  $\mathbf{x}_s(t) = e^{tA}\mathbf{c}(t)$  zu wagen. Dann folgt mit Hilfe der Kettenregel:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_s(t) &= e^{tA}A\mathbf{c}(t) + e^{tA}\dot{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{b}(t) = e^{tA}A\mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t) \\ \Leftrightarrow \dot{\mathbf{c}}(t) &= e^{-tA}\mathbf{b}(t)\end{aligned}$$

Durch Integrieren und Einsetzen des Ansatzes findet man:

$$\mathbf{x}_s(t) = e^{tA} \int_{\tau}^t e^{-sA} \mathbf{b}(s) ds$$

wo man allerdings immer o.B.d.A.  $\tau = 0$  annehmen kann. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet nun:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_s(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} \mathbf{b}(s) ds \quad (16)$$

Damit ist das Problem der Integration der inhomogenen DGL gelöst.

Es existiert noch ein schnellerer Ansatz zur Lösung des homogenen Anteils von skalaren Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, indem man  $x_h(t) = e^{\lambda t}$  in die DGL einsetzt. Hierdurch erhält man das sogenannte charakteristische Polynom, dessen Nullstellen die benötigten Eigenwerte liefert.

**Satz 2.5 (charakteristisches Polynom):** Für die DGL

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_0 \cdot x(t) = 0$$

erhält man das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0\lambda = 0$$

Dieses charakteristische Polynom lässt sich nun in Linearfaktoren zerlegen, dass also gilt:

$$P(\lambda) = \prod_{k=1}^r (\lambda - \lambda_k)^{\kappa_k}$$

wobei  $r$  die Anzahl der Nullstellen, und  $\kappa_k$  die Vielfachheit der  $k$ -ten Nullstelle bezeichnet (es gilt  $\sum_{k=1}^r \kappa_k = n$ ). Die Lösung schreibt sich dann als

$$x(t) = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{\kappa_k} c_{k,l} t^{l-1} e^{\lambda_k t}$$

wobei die  $\{c_{k,l}\}$  komplexe Konstanten sind.

**Beispiel (harmonischer Oszillator):** Wie weiter oben schon angesprochen, lässt sich die DGL des harmonischen Oszillators auch einfacher lösen. Für

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

erhält man das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

welches die Lösungen  $\lambda_{\pm} = \pm i\omega_0$  besitzt. Daher schreibt sich nach Satz (2.5) die Lösung:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$$

Nach Einarbeitung der Anfangsbedingungen  $(x_0, \dot{x}_0) = (1, \omega)$  erhält man

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t)$$

was dem vorherigem Ergebnis entspricht.