Ferienkurs
Analysis 1 für Physiker
Integration - Aufgaben

Jonas Funke

02.03.2009 - 06.03.2009

1 Bemerkung

Es sollten zuerst die Aufgaben, die **nicht** mit einem * versehen sind bearbeitet werden. Die Aufgaben die mit einem * versehen sind, bieten inhaltlich nicht viel Neues aber dienen zur Verbesserung des Rechenkalküls und können zu hause oder -wenn noch Zeit bleibt - nach den anderen Aufgaben bearbeitet werden.

2 Partielle Integration

2.1 Aufgabe

Aufgabe Man berechne die folgenden Integrale:

a)

$$\int x^2\, e^{a\,x} dx \quad \text{mit } a \neq 0$$

b)*

$$\int x^2 \, \cos(x) dx$$

c)

$$\int e^{-x} \, \cos(5x) dx$$

Lösung a) Zweimaliges partielles Intgerieren führt auf:

$$\int x^2\, e^{a\,x} dx = \left(\frac{1}{a} x^2 - \frac{2}{a^2} x + \frac{2}{a^3} \right) \, e^{ax}$$

b) Zweimaliges partielles Intgerieren führt auf:

$$\int x^2 \, \cos^(x) dx = (x^2 - 2) \sin(x) + 2 \cos(x)$$

c) Zweimaliges partielles Intgerieren führt auf:

$$\int e^{-x} \, \cos(5x) dx = -e^{-x} \cos(5x) + 5e^{-x} \sin(5x) - 25 \int e^{-x} \, \cos(5x) dx$$

und damit erhält man durch Umstellen:

$$\int e^{-x} \, \cos(5x) dx = \frac{1}{26} (5 \sin(5x) - \cos(5x)) e^{-x}$$

2.2 Aufgabe

Aufgabe Man gebe eine Rekursionsformel für

a)

$$C_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx \tag{1}$$

b)*

$$L_n = \int_1^e \ln^n(x)dx \tag{2}$$

an.

Lösung a) Mit Partieller Integration ($u' = \cos(x)$ und $v = \cos^{n-1}(x)$) erhält man

$$\begin{aligned} C_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx &= \sin(x)\cos^{n-1}(x)|_0^{\pi/2} + (n-1)\int \sin^2(x)\cos^{n-2}(x)dx \\ &= 0 + (n-1)\int (1-\cos^2(x))\cos^{n-2}(x)dx = (n-1)(C_{n-2} - C_n) \\ &\Leftrightarrow C_n = \frac{n-1}{n}C_{n-2} \end{aligned}$$

b) Mit $u' = 1$ und $v = \ln(x)^n$ folgt

$$L_n = \int_1^e 1 \cdot \ln(x)^n dx = x\ln(x)^n|_1^e - \int_1^e n\ln(x)^{n-1} = e - nL_{n-1}$$

2.3 Aufgabe

Mit $n, m \in \mathbb{N}$ berechne man (zunächst rekursiv und damit dann explizit)

$$I_{n,m} = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$$

2.4 Lösung

Mit der Substitution $u' = x^n$ und $v = (1-x)^m$ erhält man:

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(1-x)^m|_0^1 + \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{m-1}dx \\ &= \frac{m}{n+1}I_{n+1,m-1} = \frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}\cdot I_{n+2,m-2} = ... \\ &= \frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}\cdot ... \cdot\frac{1}{n+m}\cdot \underbrace{I_{n+m,0}}_{1/(n+m+1)} = \frac{m!\,n!}{(n+m+1)!} \end{aligned} \tag{3}$$

3 Substitution

3.1 Aufgabe

Aufgabe Man berechne das Integral

a)

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} \quad (\text{Substitution: } u = \tan(\frac{x}{2}) \text{ und } \sin(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} \;)$$

b)

$$\int \frac{dx}{1+\cosh(x)} \quad (\text{Substitution: } u = e^x,\ \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}))$$

c)

$$\int \cos(x)\,\sin(2x)dx$$

Lösung a) Mit $u = \tan(\frac{x}{2})$, $dx = 2(1+u^2)du$ und $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$ folgt:

$$\int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}} du = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c = \ln|\tan(\frac{x}{2})| + c$$

b) Mit der Substitution $u = e^x$

$$\int \frac{dx}{1+\cosh(x)} = \int \frac{\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u})} du = \int \frac{2\,du}{(1+u)^2} = -\frac{2}{1+u} + c = -\frac{2}{1+e^x} + c$$

c) Mit $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ und der Substitution $u = \cos(x)$ erhält man:

$$\int \cos(x)\,\sin(2x)dx = 2\int \cos^2(x)\,\sin(x)dx = -2\int u^2 du = -\frac{2}{3}\cos^3(x) + c$$

4 Partialbruchzerlegung

4.1 Aufgabe

Aufgabe Man berechne die Integrale:

a)

$$\int \frac{3x}{x^3+3x^2-4} dx$$

b)

$$\int \frac{x^7+1}{x^5+x^3}dx$$

c)

$$\int \frac{x-4}{x^3+x}dx$$

d)*

$$\int \frac{dx}{x^4\,(1+x)}$$

e)*

$$\int \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

(Hinweis: Man verwende für das Integral $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, dass $I_n = \frac{1}{2(n-1)}(\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1})$ (kann durch partielle Integration von I_{n-1} gezeigt werden) und $I_1 = \arctan(x)$ gilt.)

Lösung a) Erste NST durch $x = 1$ und Polynomdivision ergibt:

$$\frac{3x}{x^3+3x^2-4} = \frac{3x}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

Also Koeffizienten erhält man $A = 1/3$, $B = -1/3$ und $C = 2$. Es folgt:

$$F(x) = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| - \frac{4}{x+2} + c$$

b) Nach Polynomdivision erhält man

$$\frac{x^7+1}{x^5+x^3} = x^2 - 1 + \frac{x^3+1}{x^3(x^2+1)}$$

Die Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\frac{x^7+1}{x^5+x^3} = x^2 - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{x+1}{x^2+1}$$

Und damit

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x + \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \arctan(x) + c$$

c) Die Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\frac{x-4}{x^3+x} = \frac{x-4}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+3}{x^2+1}$$

Es folgt $A = -4$, $B = 4$ und $C = 1$. Integration der Einzelterme liefert:

$$-\int \frac{4}{x} + \frac{4x+1}{x^2+1} dx = 4\int \frac{1}{x} dx - 4\int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= -4\ln|x| + 2\ln|x^2+1| + \arctan(x) + c = 2\ln|\frac{x^2+1}{x^2}| + \arctan(x) + c$$

d) Die Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\frac{1}{x^4(1+x)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x^4} + \frac{B}{1+x}$$
$$\Rightarrow A_1 = -1;\ A_2 = 1;\ A_3 = -1;\ A_4 = 1;\ B = 1$$
$$\Rightarrow F(x) = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \ln|x+1| + c$$

e) Man erhält:

$$\int \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int -\frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{(1+x^2)^2}\, dx = -\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} + \arctan(x) + c = \frac{x}{1+x^2} + c$$

wobei

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + I_1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \arctan(x)\right)$$

verwendet wurde.

5 Gemischte Aufgaben

5.1 Aufgabe

Man berechne die Stammfunkionen von

Aufgabe a)*

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

b)*

$$\int \sqrt{1+x^2} dx$$

c)*

$$\int \sqrt{x^2-1}$$

(Hinweis: $\cos(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, $\cosh(\operatorname{arcsinh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$, $\sinh(\operatorname{arccosh}) = \sqrt{x^2-1}$)

Lösung a) Partielle Integration mit $v' = 1$ ergibt:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Nun substituier man $u = \sin(x)$ erhält für das Integral:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \sin^2(u)du = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$$

Mit $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{(}1-x^2)$ erhält man:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x))$$

b) Partielle Integration mit $v' = 1$ ergibt:

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

Nun substituier man $u = \sinh(x)$ und $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ erhält für das Integral:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \sinh^2(u)du = \frac{1}{2}(x + \sinh(x)\cosh(x))$$

Mit $\cosh(\operatorname{arcsinh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$ erhält man:

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \text{arcsinh(x)})$$

c) Wie a) und b) nur mit der Substitution $u = \arccos(x)$ und $\sinh(\operatorname{arccosh}) = \sqrt{x^2-1}$.

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \text{arccosh(x)})$$

5.2 Aufgabe

Aufgabe Man berechne folgende Integrale:

a)

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}dx$$

(Hinweis: Substitution $x = \ln(t)$ und evtl. Partialbruchzerlegung)

b)

$$\int \frac{\sin(2x)}{3+\sin^2(x)}dx$$

c)

$$\int \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)}dx$$

d) Mit $a, b > 0$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2(x)+b^2\cos^2(x)}$$

Lösung a) Mit der angegeben Substitution erhält man

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{t^2}{t^2-1}dt$$

Mit Polynomdivision und Partialbruchzerlegung vereinfacht sich der Integrand wie folgt:

$$\frac{t^2}{t^2-1} = 1 - \frac{1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1}$$

Nach Integration und Rücksubstitution ergibt sich:

$$F(x) = e^x + \frac{1}{2}\ln|\frac{e^x-1}{e^x+1}| + c$$

b) Mit $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ und der Substitution $u = \sin(x)$ erhält man:

$$\int \frac{\sin(2x)}{3+\sin^2(x)}dx = \int \frac{2u}{3+u^2}du$$

Mit der Substitution $t = u^2$ erhält man nun:

$$\int \frac{2u}{3+u^2}du = \int \frac{dt}{3+t} = \ln|3+t| + c = ... = \ln|3+\sin^2(x)| + c$$

c) Mit der Substitution $u = \tan(x)$ und $du = (1+u^2)dx$ erhält man

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)}dx = \int \frac{u}{(1+u)\,(1+u^2)}du = \int \left(\frac{-1/2}{1+u} + \frac{\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}}{1+u^2}\right) du \\ = -\frac{1}{2}\ln|1+u| + \frac{1}{4}\ln|1+u^2| + \arctan(u) + c \\ = -\frac{1}{2}(\ln|\cos(x)+\sin(x)| - \ln|\cos(x)|) + \frac{1}{4}(-\ln|\cos^2(x)|) + \frac{x}{2} + c \\ = -\frac{1}{2}\ln|\cos(x)+\sin(x)| + \frac{x}{2} + c\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2(x)+b^2\cos^2(x)} = \int_0^{\pi/2} \frac{1/\cos^2(x)}{a^2\tan^2(x)+b^2}dx \int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2t^2+b^2} = \\ = \frac{1}{ab}\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+1}du = \frac{1}{ab}arctan(u)|_0^{\infty} = \frac{\pi}{ab}\end{aligned}$$

Mit der ersten Substitution $t = \tan(x)$ und der zweiten Substitution $u = \frac{a}{b}t$.

5.3 Uneigentliche Integrale

Aufgabe Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a)

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

b)

$$\int_0^1 \ln(x)dx$$

c)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2(x)} \qquad (\sin(x) \leq \text{für } x \in [0, \pi/2])$$

d)

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$$

e)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin(x)}$$

Lösung a) Mit $x = u^2$ und $dx = 2udu$ folgt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^\infty \frac{2\,du}{1+u^2} = 2\arctan(u)|_0^\infty = \pi$$

b)

$$\int_0^1 \ln(x)dx = x\,\ln(x)|_0^1 - \int_0^1 dx = 0 - \underbrace{\lim_{a\to 0+}(a\,\ln(a))}_{=0 \text{ l'Hospital}} - 1 = -1$$

c) Mit $\sin(x) \leq x$ für $x \in [0, \pi/2]$ folgt

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2(x)} \geq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^2} \to \infty$$

d)

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \lim_{a\to -1}\left(\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x+1})^2|_a^0\right) = \frac{3}{2}$$

e) Mit der gleichen Abschätzung aus c) folgt ebenfalls

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin(x)} \geq \int_0^1 \frac{dx}{x} \to \infty$$

5.4 Aufgabe

Aufgabe Zeigen Sie

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\,(\ln(x))^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergent für } \alpha > 1 \\ \text{divergent für } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Lösung Mit $u = \ln(x)$ folgt

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\,(\ln(x))^\alpha} = \int_1^\infty \frac{du}{u^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergent für } \alpha > 1 \\ \text{divergent für } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

(Vergleiche Vorlesung)

5.5 Ableitung von Integralen

Aufgabe a)

$$\frac{d}{dx}\int_{2}^{x^2}\frac{\cos^2(t)}{1+\cos(t)}dt$$

b)

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x}e^{-t^2}dt$$

c)

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{0}^{x}tf(t)dt$$

Lösung a)

$$\frac{d}{dx}\int_{2}^{x^2}\frac{\cos^2(t)}{1+\cos(t)}dt = \frac{d}{dx}(F(x^2)-F(2)) = F'(x^2)\cdot 2x = \frac{2x\cos^2(x^2)}{1+\cos(x^2)}$$

b)

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x}e^{-t^2}dt = e^{-x^2} - e^{-x^2}\cdot(-1) = 2e^{-x^2}$$

c)

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{0}^{x}tf(t)dt = \frac{d^2}{dx^2}(tF(t)|_0^x - \int_{0}^{x}F(t)dt) = \frac{d}{dx}(x\,f(x)+F(x)-F(x)) = f(x)+x\,f'(x)$$