Ferienkurs
Analysis 1 für Physiker
Integration - Aufgaben

Jonas Funke

02.03.2009 - 06.03.2009

1 Bemerkung

Es sollten zuerst die Aufgaben, die **nicht** mit einem * versehen sind bearbeitet werden. Die Aufgaben die mit einem * versehen sind, bieten inhaltlich nicht viel Neues aber dienen zur Verbesserung des Rechenkalküls und können zu hause oder -wenn noch Zeit bleibt - nach den anderen Aufgaben bearbeitet werden.

2 Partielle Integration

2.1 Aufgabe

Aufgabe Man berechne die folgenden Integrale:

a)

$$\int x^2\, e^{a\,x} dx \quad \text{mit } a \neq 0$$

b)*

$$\int x^2\, \cos(x) dx$$

c)

$$\int e^{-x}\, \cos(5x) dx$$

2.2 Aufgabe

Aufgabe Man gebe eine Rekursionsformel für

a)

$$C_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx \tag{1}$$

b)*

$$L_n = \int_1^e \ln^n(x) dx \tag{2}$$

an.

2.3 Aufgabe

Mit $n, m \in \mathbb{N}$ berechne man (zunächst rekursiv und damit dann explizit)

$$I_{n,m} = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

3 Substitution

3.1 Aufgabe

Aufgabe Man berechne das Integral

a)

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} \quad \text{(Substitution: } u = \tan(\frac{x}{2}) \text{ und } \sin(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}\ \text{)}$$

b)

$$\int \frac{dx}{1+\cosh(x)} \quad \text{(Substitution: } u = e^x,\ \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\text{)}$$

c)

$$\int \cos(x)\ \sin(2x) dx$$

4 Partialbruchzerlegung

4.1 Aufgabe

Man berechne die Integrale:

a)

$$\int \frac{3x}{x^3+3x^2-4} dx$$

b)

$$\int \frac{x^7+1}{x^5+x^3} dx$$

c)

$$\int \frac{x-4}{x^3+3} dx$$

d)*

$$\int \frac{dx}{x^4\,(1+x)}$$

e)*

$$\int \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

(Hinweis: Man verwende für das Integral $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, dass $I_n = \frac{1}{2(n-1)}(\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1})$ (kann durch partielle Integration von I_{n-1} gezeigt werden) und $I_1 = \arctan(x)$ gilt.)

5 Gemischte Aufgaben

5.1 Aufgabe

Man berechne die Stammfunkionen von

Aufgabe a)*

$$\int \sqrt{1-x^2}dx$$

b)*

$$\int \sqrt{1+x^2}dx$$

c)*

$$\int \sqrt{x^2-1}$$

(Hinweis: $\cos(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, $\cosh(\operatorname{arcsinh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$, $\sinh(\operatorname{arccosh}) = \sqrt{x^2-1}$)

5.2 Aufgabe

Aufgabe Man berechne folgende Integrale:

a)

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}dx$$

(Hinweis: Substitution $x = \ln(t)$ und evtl. Partialbruchzerlegung)

b)

$$\int \frac{\sin(2x)}{3+\sin^2(x)}dx$$

c)

$$\int \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)}dx$$

d) Mit $a, b > 0$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2(x) + b^2\cos^2(x)}$$

5.3 Uneigentliche Integrale

Aufgabe Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

b)

$$\int_0^1 \ln(x)dx$$

c)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2(x)} \qquad (\sin(x) \leq \text{für } x \in [0, \pi/2])$$

d)

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$$

e)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin(x)}$$

5.4 Aufgabe

Aufgabe Zeigen Sie

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\,(\ln(x))^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergent für } \alpha > 1 \\ \text{divergent für } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

5.5 Ableitung von Integralen

Aufgabe a)

$$\frac{d}{dx}\int_2^{x^2} \frac{\cos^2(t)}{1+\cos(t)}dt$$

b)

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt$$

c)

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x tf(t)dt$$