# Ferienkurs
# Analysis 1 für Physiker
# Integration - Vorlesung

Jonas Funke

02.03.2009 - 06.03.2009

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Das bestimme Integral

## 1.1 Das Integral

Existiert eine Funktion f(x), so lässt sich diese meistens Differenzieren. Es stellt sich jedoch die Frage, ob eine Funktion F(x) mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ existiert. Die Antwort, bzw. das Werkzeug diese Funktion zu finden ist die Integration.
Die Grundidee zur Berechnung der Stammfunktion stammt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \ (i = 1, 2, ...n) \tag{1}$$

$$\Rightarrow f(a) - f(b) = \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Wobei im zweiten Schritt das Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ aufgeteilt und über diese summiert wurde. Zunächst definiert man nun das **bestimmte Integral**:

**Definition 1 (Bestimmtes Integral)** *Das bestimmte Integral von f(x) über dem Intervall [a,b] ist gegeben durch:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{4}$$

*a und b sind die Integrationsgrenzen.*

*Bemerkung: Man teilt das Intervall [a,b] also in n Teilintervalle ein, wobei die Unterteilung nicht unbedingt äquidistant sein muss. Mathematisch explizit müsste man sagen, dass das bestimmte Integral der Grenzwert aller Teilfolgen* $Z_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ *mit beliebiger Unterteilung ist. Außerdem setzt man vorraus, dass f(x) beschränkt und stückweise stetig ist (d.h. nur endlich viele unstetige Stellen hat).*
Nun definiert man weiter die Stammfunktion:

**Definition 2 (Stammfunktion)** *Die Funktion F(x) heißt **Stammfunktion** von f(x), falls*

$$F'(x) = f(x) \tag{5}$$

*gilt.*
*(F(x) muss auf dem Intervall I differenzierbar sein.)*

Nun kann man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formulieren:

**Satz 1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)** *Ist f eine auf dem Intervall I stetige Funktion, $a, b \in I$, dann gilt:*

***a) Existenz der Stammfunktion*** *Die durch*

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in I) \tag{6}$$

*definierte Integralfunktion ist eine Stammfunktion von f; d.h.*

$$\frac{d}{dx} F_a(x) = f(x) \tag{7}$$

*Jede andere Stammfunktion von f hat die Form $F(x) = F_a(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$*

***b) Integralberechnung*** *Mit einer beliebigen Stammfunktion F von f gilt*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)} \tag{8}$$

*Bemerkung:Führt man in Gleichung 2 die Ersetzungen $f'(x) \to f(x)$, $f(x) \to F(x)$, $\sum \to \int$ und $(x_i - x_{i-1}) \to dx$ durch und lässt n gegen unendlich streben ($n \to \infty$), erhält man ebenfalls Teil b) des Hauptsatzes.*

Mithilfe des Hauptsatzes lässt sich nun das bestimmte Integral wie folgt berechnen:

Berechnung des **bestimmten Integrals** $\int_a^b f(x)dx$

1. Man bestimmt eine Stammfunktion F von f
2. Man berechnet $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

Wichtig ist noch, dass man zwischen dem bestimmten und unbestimmten Integral unterscheidet. Das bestimmte Integral zeichnet sich dadurch aus, dass bestimmte Grenzen eingesetzt werden, während das unbestimmte Integral lediglich eine Stammfunktion darstellt. Es gilt:

**Definition 3 (Unbestimmtes Integral)** *Die Menge aller Stammfunktionen von f wird mit $\int f(x)dx$ bezeichnet und heißt **unbestimmtes Integral**.*

Die Kunst, bzw die Schwierigkeit bei der Integralberechnung ist im Allgemeinen immer die Stammfunktion zu finden. Hierzu gibt es verschiedene Methoden. Doch zunächst noch ein paar allgemeine Eigenschaften des bestimmten Integrals und der Mittelwertsatz der Integralrechnung:

### 1.2 Eigenschaften des bestimmten Integrals

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \text{ (linear)} \tag{9}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a \leq c \leq b) \tag{10}$$

$$f(x) \leq g(x) \ (a \leq x \leq b) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{11}$$

### 1.3 Mittelwertsatz der Integralrechnung

**Satz 2 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)** *Sind die Funktionen $f$, $g$ auf $[a,b]$ stetig, $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann gibt es wenigstens eine Stelle $\xi \in [a,b]$ mit:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \tag{12}$$

Für $g(x) = 1$ erhält man Spezialfall:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

mit $\xi \in [a,b]$.

## 2 Integrationsregeln

Wie oben schon erwähnt besteht die größte Schwierigkeit beim Berechnen des Integrals in dem Finden der Stammfunktion, hierzu gibt es verschiedenen Möglichkeiten abhängig von der Funktion $f(x)$:

### 2.1 Partielle Integration

Die partielle Integration ist das Analogon der Integration zur Produktregel bei der Differentiation. Die Produktregel kenne wir:

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v' \Leftrightarrow u'\,v = (u\,v)' - u\,v'$$

Integriert man dies erhält man sofort die Formel für die **partielle Integration**:

$$\boxed{\int u'(x)\,v(x)dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)dx} \tag{13}$$

bzw. für das bestimmte Integral, also mit Grenzen:

$$\boxed{\int_a^b u'(x)\,v(x)dx = u(x)\,v(x)|_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)dx} \tag{14}$$

Wann wendet man nun die partielle Integration an? Der Auslöser für die partielle Integration ist, dass die Funktion $f(x)$ aus einem Produkt besteht. Nützlich ist diese Methode gerade wenn das Produkt aus einem Polynom und einer Funktion, dessen Ableitung wieder sich selbst (oder eine ähnliche Funktion) ergibt besteht.
Beispiele:

**Beispiel 1**

$$\int x\,e^x dx = x\,e^x - \int e^x dx = x\,e^x - e^x + c$$

Mit dem Ansatz $u' = e^x$ und $v = x$, da die Stammfunktion von $e^x$ leicht zu finden ist und $v' = 1$ ist und so das letzte Integral einfach wird.

**Beispiel 2**

$$\int x^2\,\sin(x)dx = -x^2\,\cos(x) + 2\int x\,\cos(x)dx$$

Mit dem Ansatz $u' = \sin(x)$ und $v = x^2$. Ein weiteres mal partielle Integration führt mit

$$\int x\,\cos(x)dx = x\,\sin(x) + \int \sin(x)dx = x\,\sin(x) + \cos(x) + c$$

auf die Lösung:

$$\int x^2\,\sin(x)dx = -x^2\,\cos(x) + 2\,(x\,\sin(x) + \cos(x)) + c$$

**Beispiel 3** Oft lassen sich mithilfe der partiellen Integration folgende Integrale rekursiv lösen:

$$S_n := \int_a^b (\sin(x))^n dx \qquad C_n := \int_a^b (\cos(x))^n dx$$
$$A_n := \int_a^b x^n\,\sin(x)dx \qquad B_n := \int_a^b x^n\,\cos(x)dx$$
$$E_n := \int_a^b x^n e^x dx \qquad L_n := \int_a^b (\ln(x))^n dx$$

Als Beispiel wollen wir das Integral $\int_0^{\pi/2}(\sin(x))^n dx$ bestimmen. Mit dem Ansatz $u' = \sin(x)$ und $v = \sin(x)^{n-1}$ ergibt sich:

$$S_n(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^n dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,(\sin(x))^{n-1} dx \tag{15}$$

$$= -\cos(x)\,\sin(x)^{n-1}|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1)(\cos(x))^2(\sin(x))^{n-2} dx \tag{16}$$

Mit $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$ ergibt sich dann:

$$S_n(x) = (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin(x)^2)\, sin(x)^{n-2} dx = (n-1)\,(S_{n-2} - S_n)$$

Stellt man dies um, ergibt sich:

$$S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}$$

Mit den Anfangswerten $S_0 = \pi/2$ und $S_1 = 1$.

## 2.2 Substitution

Das Analogon zur Kettenregel ist die Substitution. Integriert man $\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$ erhält man sofort die **Substitution 1. Art**:

$$\boxed{\int f(g(x))\, g'(x) dx = F(g(x)) + c} \tag{17}$$

oder mit Grenzen:

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\, g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt} \tag{18}$$

Die Substitution 1. Art wendet man an, wenn die Ableitung der zu substituierenden Funktion im Produkt der Gesamtfunktion steht (Bsp. $\int xe^{x^2}dx$, $\int \sin(\sin(x))\cos(x)dx$ oder einfach $\int \tan(7x)dx$).

Berechnung von $\int f(g(x))\, g'(x)dx$ mit der **Substitution 1.Art**

1. Man substituiert $t = g(x)$ und erhält damit $\frac{dt}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{g'(x)}$.
2. Man berechnet $\int f(t)dt = F(t) + c$.
3. Rücksubstitution: $\int f(g(x))\, g'(x)dx = F(g(x)) + c$

Beispiele

**1. Beispiel** Um $\int e^{2\sin(x)} \cos(x)dx$ zu berechnen substituieren wir folgt:

$$t = 2\sin(x) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 2\cos(x) \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{2\cos(x)}$$

Dies setzten wir ein und erhalten:

$$\int e^{2\sin(x)} \cos(x)dx = \int e^t \cos(x) \frac{dt}{2\cos(x)} = \frac{1}{2}\int e^t dt = frac12e^t + c$$

Nun die Rücksubstitution:

$$\frac{1}{2}e^t + c = \frac{1}{2}e^{2\sin(x)} + c$$

**2. Beispiel**

$$\int \frac{\ln(x)^2}{x}dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{1}{3}\ln(x)^3 + c$$

Mit der Substitution $t = \ln(x)$

**3. Beispiel**

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|g(x)| + c$$

Oft ist die zu integrierende Funktion nicht als ein Produkt aus innerer Ableitung und äußerer Funktion gegeben. Hier muss man dann oft herumprobieren, bzw. Erfahrung haben. In diesem Sinne hilft dann oft die Substitution 2. Art weiter. Der Unterschied zur 1.Art besteht darin, dass bei der 2. Art $x = g(t)$ und nicht $t = g(x)$ ersetzt wird. Dies geschieht oft auch durch umkehren der Substitution 1. Art $t = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(x)$. Das Verfahren wird am besten an einem Beispiel deutlich:
Das Integral $\int \sqrt{1-x^2}dx$ lässt sich gut mit der Substitution $x = sin(t) \Rightarrow dx = cos(t)dt$ berechnen:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin(x)^2} \cos(t)dt = \int \cos(t)^2 dt = \frac{1}{2}(t + \sin(t) \cos(t)) + c$$

Nun muss man noch Rücksubstituieren,f indem man die Beziehung $x = sin(t)$ nach $t = \arcsin(x)$ umstellt und man erhält:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(\arcsin(x) + x \cos(\arcsin(x))) + c$$

Dieses Verfahren kann man wie folgt zusammenfassen:

Berechnung von $\int f(x)dx$ mit der **Substitution 2. Art**

1. Man substituiert $x = g(t)$ und erhält damit $\frac{dx}{dt} = g'(t) \Leftrightarrow dx = g'(t)dt$.
2. Man berechnet $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt = H(t) + c$.
3. Substitution invertieren, d.h. $t = g^{-1}(x)$ und rücksubstituieren: $\int f(x)dx = H(g^{-1}(x)) + c$

Oft ist es einfacher sowohl bei der Substitution 1. Art, als auch bei der Substitution 2.Art die Grenzen mitzusubstituieren:

Als Beispiel für die 2.Art berechnen wir das Integral $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ und substituieren zunächst $x = \tan(t)$ und $dx = \frac{dt}{\cos(t)^2}$. Damit erhält man für die Grenzen $x = 0 : t = \arctan(0) = 0$ und $x = 1 : t = \arctan(1) = \pi/4$. Es ergibt sich nun:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{(1 + \frac{\sin(t)^2}{\cos(t)^2})^2 \cos(t)^2} = \int_0^{\pi/4} \cos(t)^2 dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

## 2.3 Partialbruchzerlegung

Die Methode der Partialbruchzerlegung wendet man an, wenn die zu integrierende Funktion $f(x)$ eine rationale Funktion ist, d.h. $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Grad$(p(x))<$Grad$(q(x))$ gilt. Ist der Grad der Zählerfunktion größer oder gleich der Nennerfunktion, so kann man per Polynomdivision den oben genannten Fall erzeugen (also $f(x) = g(x) + \frac{p(x)}{q(x)}$).
Das Ziel der Partialbruchzerlegung ist die Funktion in eine Summe aus einfachere elementar integrierbare Funktionen zu zerlegen. Zunächst ein einfaches Beispiel:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{-1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}$$

Wir haben also zuerst die Nullstellen der Nennerfunktion $q(x)$ bestimmt und diese in ihre Linearfaktoren zerlegt. Danach haben wir die Koeffizienten A und B (hier durch genaues hinsehen, bzw. raten) bestimmt. Die gefundene Summe lässt sich nun leicht Integrieren:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{-1/2}{x-1}dx + \int \frac{1/2}{x+1}dx = -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

Die Partialbruchzerlegung lässt sich also in fünf Schritte einteilen:

Integration rationaler Funktionen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mittels **Partialbruchzerlegung**

1. Ist Grad$(p(x)) >$ Grad$(q(x)) \Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{\bar{p}(x)}{\bar{q}(x)}$ dann weiter mit $\frac{\bar{p}(x)}{\bar{q}(x)}$.
2. Bestimmung der Nullstellen von $q(x)$ und Faktorisierung
   Bsp.: $q(x) = (x-2)^3\,(x-5)\,(x^2+2)\,(x^2+3)^2$
3. Partialbruchansatz, d.h. beim obigen Bsp.:
   $\frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{A_4}{x-5} + \frac{B_1+C_1x}{x^2+2} + \frac{B_2+C_2x}{x^2+3} + \frac{B_3+C_3x}{(x^2+3)^2}$
4. Bestimmen der Koeffizienten (mittels Koeffizientenvergleich oder Einsetzen)
5. Integration der Summanden

*Bemerkung: In $\mathbb{R}$ zerfällt ein Polynom nicht immer in Linearfaktoren - in $\mathbb{C}$ zerfällt es jedoch vollständig in Linearfaktoren. Man könnte deshalb das Nennerpolynom auch ganz* *in $\mathbb{C}$ zerlegen und dann die trivialen Ansätze für die Koeffizienten wählen. Will man jedoch nur in $\mathbb{R}$ rechnen müssen Faktoren die komplexe Nullstellen besitzen mit dem Ansatz $A_i x + B_i$ versehen werden.* Zur Bestimmung der Koeffizienten (Schritt 4) stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Am folgenden Beispiel werden die beiden Methoden erläutert:

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x-2)} \Rightarrow f(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_4}{x-2}$$

**Koeffizientenvergleich** Multipliziert man dies mit dem Nennerpolynom $q(x)$ erhält man:

$$\begin{aligned} x^2+x+1 = {} & A_1\,(x-1)^2\,(x-2) + A_2\,(x-1)\,(x-2) + \\ & + A_3\,(x-2) + A_4\,(x-1)^3 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} x^2+x+1 = {} & (A_1+A_4)x^3 + (-4A_1 + A_2 - 3A_4)x^2 + \\ & + (5A_1 - 3A_2 + A_3 + 3A_4)x + (-2A_1 + 2A_2 - 2A_3 - A_4) \end{aligned} \tag{20}$$

Hieraus erhält man mit dem Koeffizientenvergleich der verschiedenen Potenzen der x das zu lösende Gleichungssystem $A_1 + A_4 = 0$ ,$-4A_1 + A_2 - 3A_4 = 0$, $5A_1 - 3A_2 + A_3 + 3A_4 = 1$, $-2A_1 + 2A_2 - 2A_3 - A_4 = 1$.Dies sind genug Gleichungen um alle Koeffizienten zu bestimmen.

**Einsetzten** Man kann die Koeffizienten auch bestimmen, indem man in Gleichung 19 verschiedene Werte für x einsetzt. Zunächst bieten sich immer die Nullstellen an, da sich so einfache Gleichungen ergeben. Setzt man z.B. x=1, x=2, x=3, x=0 ein(man benötigt so viele Gelichungen wie Variablen vorhanden sind), ergibt sich folgendes Gleichungssystem: $3 = -A_1$, $7 = B$, $13A_1 + 2A_2 + A_3 + 8A_4$, $1 = -2A_1 + 2A_2 - 2A_3 - A_4$.

Nun noch ein etwas komplexeres Beispiel:

$$R(x) = \frac{3x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 7x + 6}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$$

1. Da der Nennergrad größer als der Zählergrad ist und weder $x - 1$ noch $x^2 + 1$ gekürzt werden können, kann man die Partialbruchzerlegung anwenden.

2. Da der Nenner schon in Elementarfaktoren zerlegt ist entfällt die Nullstellenberechnung.

3. Die Partialbruchzerlegung lautet:

$$R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1 + C_1 x}{x^2+1} + \frac{B_2 + C_2 x}{(x^2+1)^2}$$

4. Bestimmen der Koeffizienten mittels Koeffizientenvergleich oder Einsetzen von Werten ergibt $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $B_1 = 1$, $C_1 = 2$, $B_2 = 4$ und $C_2 = 0$.

5. Integration der einzelnen Summanden ergibt dann:

$$\int R(x)dx = -\frac{2}{x-1} + \frac{2x}{x^2+1} + \ln|x-1| + \ln|x^2+1| + 3\arctan(x) + c$$

### 2.4 Symmetrien

Oft lassen sich Integrale sehr vereinfachen, wenn man die Symmetrien beachtet.

**Gerade Funktionen** Für gerade Funktionen ($f(x) = f(-x)$) gilt für symmetrische Integrationsgrenzen:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \tag{21}$$

**Ungerade Funktionen** Für ungerade Funktionen ($f(x) = -f(-x)$) gilt für symmetrische Integrationsgrenzen:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \tag{22}$$

## 3 Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale werden eingeführt, damit Integrale berechnet werden können, deren

- Integranden $f(x)$ an den Grenzen (bzw. in dem Intgrationsbereich) nicht beschränkt sind ($\int_0^2 \frac{2x}{(x^2-1)^2}dx$)
- Integrationsintervall unendlich ist (Bsp. $\int_0^\infty x^{-2}dx$)

### 3.1 Einfache uneigentliche Integrale

Formal definiert man die uneigentlichen Integrale wie folgt:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)dx \quad \text{für die Ausnahmestelle b} \tag{23}$$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx \tag{24}$$

Praktisch bedeutet dies, dass wir für die Ausnahmestellen, bzw. die unendlichen Integrationsgrenzen einfach Variablen (hier c) einführen und erst nach Berechnung der Stammfunktion den Grenzwert berechnen. Als Beispiele betrachten wir zwei typische Integrale die auch zur Konvergenzabschätzung benutzt werden können:

### 1. Beispiel

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{c^{\alpha-1}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{falls } \alpha > 1 \text{ (konvergiert)} \\ \infty & \text{falls } \alpha \leq 1 \text{ (divergiert)} \end{cases} \tag{25}$$

### 2. Beispiel

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to 0+} \int_0^c \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to 0+} \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{c^{\alpha-1}}-1\right) = \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha > 1 \text{ (divergiert)} \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{falls } \alpha \leq 1 \text{ (konvergiert)} \end{cases} \tag{26}$$

## 3.2 Konvergenzabschätzungen

Oft kann man mit den beiden obigen Beispielen (Gleichung 25 und 26) schwierigere Integrale auf Konvergenz bzw. Divergenz mit dem folgenden Vergleichskriterien abschätzen.

**Satz 3 (Vergleichskriterien)** *Ist $f$ auf $[a,\infty)$ und $g$ $(0,b]$ stetig und sind $\alpha, K \in \mathbb{R}$, dann gilt:*

$$|f(x)| \leq \tfrac{K}{x^\alpha} \;\; \textit{für } 1 < \alpha \quad \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx \;\; \textit{konvergiert} \tag{27}$$

$$|g(x)| \leq \tfrac{K}{x^\alpha} \;\; \textit{für } 0 < \alpha < 1 \quad \Rightarrow \int_0^b g(x)dx \;\; \textit{konvergiert} \tag{28}$$

Beispiel:
Da $|\frac{\cos(x)}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ folgt für das Integral $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}dx$ konvergiert das obige Integral.

$$\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow \text{konvergiert}$$

Anschaulich bildet $1/x^2$ die Einhüllende:

## 3.3 Uneigentliche Integrale mit zwei unendlichen Grenzen

Hat ein Integral zwei unendliche Grenzen, muss das Integrationsintervall $(-\infty,\infty)$ in $(-\infty,c]$ und $[c,\infty)$ aufgeteilt werden. Ein Beispiel:

$$\int_\infty^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_\infty^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)|_\infty^0 + \arctan(x)|_0^\infty = 2\lim_{c\to\infty} \arctan(c) = \pi$$

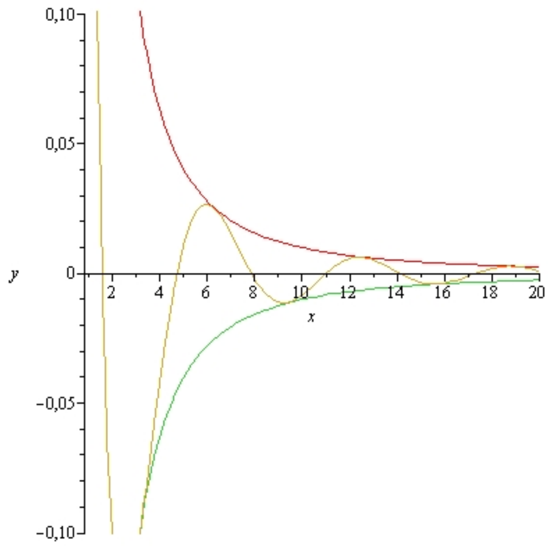


Abbildung 1: Anschaulich bildet $\frac{1}{x^2}$ die Einhüllende für $\frac{\cos(x)}{x^2}$

## 3.4 Integralkriterium für Reihen

Um die Konvergenz von Reihen zu testen ist es Möglich die Konvergenz des Integrals zu zeigen, denn es gilt:

**Satz 4 (Integralkriterium)** *Ist $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion mit $f \geq 0$, dann gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \textit{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \textit{ konvergiert} \tag{29}$$

## 3.5 Die Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion ist definiert durch:

$$\Gamma : (0, \infty) \to (R), \quad \Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \tag{30}$$

Um die Konvergenz zu zeigen, teilt man das Integral in zwei Integrale auf:

$$\Gamma(x) := \Gamma(x) := \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Nun schätzt man die beiden Integrale mit den oben angegebenen Vergleichskriterien wie folgt ab:

- Das erste Integral hat nur für $0 < x < 1$ eine Singularität. Da jedoch $e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1}$ gilt, kann die Konvergenz mit dem Vergleichskriterium 28 gezeigt werden.

- Das zweite Integral wird mit der Abschätzung $e^{-t}t^{x-1} \leq t^{-2}$ für hinreichend große $t$ mit dem Vergleichskriterium 27 konvergieren

Die Gammafunktion hat die wichtige Eigenschaft:

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{für} \quad (x > 0)} \tag{31}$$

Für $x \in \mathbb{N}$ stellt die Gammafunktion die Fakultät dar ($\Gamma(n+1) = n!$).

# 4 Wichtige Integrale

| $F(x)$ | $F'(x)$ | Bemerkung |
|---|---|---|
| $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ | $x^n$ | $n \neq -1$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | |
| $\tan(x)$ | $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ | $x \neq (2k+1)\pi$ |
| $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $\arccos(x)$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | |
| $e^x$ | $e^x$ | |
| $a^x$ | $a^x \ln(a)$ | $a^x = e^{x \ln(a)}, a > 0$ |
| $\ln\lvert x\rvert$ | $\frac{1}{x}$ | $x \neq 0$ |
| $\log_a(x)$ | $\frac{1}{x \ln(a)}$ | $a > 0$ |
| $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ | |
| $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ | |
| $\tanh(x)$ | $\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \cosh^2(x)$ | |
| $\operatorname{arsinh}(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | |
| $\operatorname{arcosh}(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | |
| $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ | $\frac{1}{1-x^2}$ | |

Tabelle 1: Wichtige Funktionen und ihre Ableitungen (bzw. Stammfunktionen).