Differentiation und Taylorentwicklung
Übung

Thomas Fehm

4. März 2009

Aufgabe 1 (Differentiation) *Man berechne die Ableitung von:*

- $f'(x) = e^{\alpha x}(\alpha \sin(\omega x + \alpha) + \omega \cos(\omega x + alpha)))$
- $f'(x) = 2\sin(\sin(\cos(x^2)))\cos(\cos(x^2))\sin(x^2)x$
- $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$
- $f'(x)\exp(\frac{x^{\cos(x)}}{x^x})x^{\cos(x)}\left(\frac{\cos(x)}{x} - \sin(x)\ln(x) - \frac{\ln(x)+1}{x^x}\right)$

Aufgabe 2 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit) *$f(x)$ ist für $x \neq 0$ differenzierbar und damit auch stetig. Es gilt: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} = 0 \Rightarrow f(x)$ ist stetig in $x = 0$. Allerdings gilt für die Steigung in $x = 0$: $\lim_{h\to 0^-} \frac{-x-h+x}{h} = -1$. Andererseits gilt: $\lim_{h\to 0^+} \frac{x+h-x}{h} = 1$. Die Ableitung am Punkt $x = 0$ ist also nicht definiert.*

Aufgabe 3 (Umkehrfunktion I) *Wenn man $f^{-1}(f(x)) = x$ auf beiden Seiten nach x ableitet erhält man: $(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$. Dividiert man durch $f'(x)$ erhält man das gewünschte Ergebnis.*

Aufgabe 4 (Umkehrfunktion II) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) > 0$. f ist somit überall streng monoton steigend und damit umkehrbar. Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{5f(x)^4+1}$. Durch Ableiten und Integrieren erhält man die Funktionswerte um eine Taylorenwicklung durchzuführen.*

Aufgabe 5 (Die Ableitungen der Kreisfunktionen)

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x)\sin(h)}{h} \quad (1)$$

Mit dem Satz von $L'Hospital$ $(\frac{0}{0})$ folgt das Ergebnis. $d/dx\cos(x)$: analog. Anmerkung: Die Aufgabenstellung ist etwas unglücklich, da man für den Lösungsweg bereits das Ergebnis benötigt. Alllerdings gibt es auch andere Möglichkeiten sich den Grenzwert: $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}$ und $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}$ zu überlegen. Zum Beispiel mit der Einheitskreisungleichung $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$. Was für $x \to 0$ den gewünschten Grnezwert liefert. Desweiteren gilt: $\frac{\cos(x)-1}{x} = \frac{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}{x(\cos(x)+1)))} = \frac{-\sin^2(x)}{x(\cos(x)+1))} = -\sin(x)\frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{\cos(x)+1}$.

, was den Gwünschten Kosinusgrenzwert ergibt.

Aufgabe 6 (Ein bisschen Quantenmechanik) $[x, \frac{d}{dx}] \equiv x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x = -1$

Aufgabe 7 (Die Regel von L'Hospital) *Man bestimme folgende Grenzwerte:*

- $\lim_{x\to 0} x\cot(x) = 1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)} = -1/2$

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{\tan(x)-1}{\arcsin(\tan(x))-\pi/2} = 0$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+3x)-2\sin^2(x)}{1-e^{-x^2}} = 7$

- $\lim_{x\to 0} \frac{x\tan(x)}{1-\cos(x)} = 2$

- $\lim_{x\to\infty} \left(\ln(2x^2+1) - 2\ln(2x-\sqrt{x^2+1})\right) = \ln\left(\frac{2x^2+1}{(2x-\sqrt{x^2+1})^2}\right) = \ln\left(\frac{2+1/x^2}{(2-\sqrt{1+1/x^2})^2}\right) =$ $\ln(2)$

- $\lim_{x\to\pi/2} \sin(x)^{\tan(x)} = 0$

Aufgabe 8 (Kurvendiskussion I) $f'(x) = 5\frac{3-4x}{2\sqrt{x}(4x+3)^2}$*; Maximum bei* $(3/4, 5\sqrt{3}/12)$*; Wendepunkt* $1/4(3+2\sqrt{3})$

Aufgabe 9 (Kurvendiskussion II) *Gegeben sei die Funktion* $f(x) = |x^2-1| + |x| - 1$ *Man bestimmte: Definitionsbereich, Wertebereich, Achsenschnittpnkte, Symmeterie, Extrema.*

- $D_f = \mathbb{R}$
- *y-Achsensymmetrisch*
- *x-Achse:* $0, \pm 1$*, y-Achse:* 0
- *Wertebereich:*$[0, \infty[$
- $Maximumbei(\pm 1/2, 1/4)$*; Minima bei* $(-1, 0, 1; 0)$

Aufgabe 10 (Kurvendiskussion III)

- $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $\quad f(x) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right| + 1\right) \geq \ln(1) = 0$

- $x < 0: \quad f(x) = \ln\left(2-\frac{1}{x}\right); \quad f'(x) = \frac{1}{x(2x-1)} > 0:$ *$f(x)$ ist s.m.s.*
  $0 < x < 1: \quad f(x) = -\ln(x); \quad f'(x) = \frac{-1}{x} < 0:$ *$f(x)$ ist s.m.f.*
  $1 < x: \quad f(x) = \ln\left(2-\frac{1}{x}\right); \quad f'(x) = \frac{1}{x(2x-1)} > 0$; *f(x)ists.m.s.*

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ln(2)$*;* $\lim_{x\to\pm 0} f(x) = +\infty$.

Aufgabe 11 (Taylorentwicklung)

- $f(x) = 1 + x + 1/2x^2 - 1/8x^4$

- $f(x) = 1 + x - 1/3x^3 - 1/6x^4 - 1/30x^5 + 1/630x^7$

Aufgabe 12 (Taylorentwicklung und Kreisfunktionen) *Es gilt:*

- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Durch Ableitung der Potenzreihen folgt die Behauptung. Satz: Konvergiert Reihe gegen f, dann konvergiert Ableitung der Reihe gegen f'.

Aufgabe 13 (Taylorentwicklung in der Physik) *Es gilt:* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1+\frac{1}{2}x^2$. *Also:* $E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$.

Aufgabe 14 (Potenzreihen und Taylorentwicklung) *Man setze die Taylorentwicklung für* $\sin(x)$ *und* $\cos(x)$ *ein und berechne den Grenzwert von:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2/2 - \cos(x)}{x \sin(x)} = -\frac{x^4 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k-4}}{x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k}} = 0 \qquad (2)$$

Aufgabe 15 (Taylorentwicklung) *Es gilt:*
$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 1/2x^3$. *Also gilt für den relativen Fehler bei einer Approximation durch die 2. Ordnung:*

$$fehler_{rel} = \frac{|f(x) - T_2(x)|}{|f(x)|} = 0.065 \qquad (3)$$