Differentiation und Taylorentwicklung
Übung

Thomas Fehm

4. März 2009

Aufgabe 1 (Differentiation) *Man berechne die Ableitung von:*

- $f(x) = e^{\alpha x}\sin(\omega x + \alpha)$
- $\cos(\sin(\cos(x^2)))$
- $\arcsin(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}})$
- $\exp(\frac{x^{\cos(x)}}{x^x})$

Aufgabe 2 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit) *Man zeige: $f(x) = |x|$ ist zwar stetig aber in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.*

Aufgabe 3 (Umkehrfunktion I) *Man beweise die Behauptung über die Ableitung der Umkehrfunktion aus der Vorlesung. Tipp: Man betrachte $f^{-1}(f(x)) = x$.*

Aufgabe 4 (Umkehrfunktion II) *Es sei $f(x) = x^5 + x, x \in \mathbb{R}$. Ist f umkehrbar? Auf welchem Intervall? Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion. Kann man aus diesen Information die Umkehrfunktion explizit konstruieren (Tipp: Taylorentwicklung).*

Aufgabe 5 (Die Ableitungen der Kreisfunktionen) *Verwenden Sie die Definition der Ableitung aus der Vorlesung um die Ableitung von sin(x) bzw. cos(x) zu finden. Anleitung: Setzen Sie die Definition der Ableitung an und formen Sie den Ausdruck mit entsprechenden Additionstheoremen so um, dass Sie auf einen Ausdruck kommen dessen Grenzwert Sie mit Hilfe des Satzes von L'Hospital bestimmen können.*

Aufgabe 6 (Ein bisschen Quantenmechanik) *Berechnen Sie den Kommutator von $[x, \frac{d}{dx}] \equiv x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x$. Anleitung: Verwenden Sie eine Testfunktion $f(x)$ welche Sie auf den Kommutator anwenden.*

Aufgabe 7 (Die Regel von L'Hospital) *Man bestimmte folgende Grenzwerte:*

- $\lim_{x\to 0} x\cot(x)$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)}$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}+} \frac{\tan(x)-1}{\arcsin(\tan(x))-\pi/2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+3x)-2\sin^2(x)}{1-e^{-x^2}}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x\tan(x)}{1-\cos(x)}$
- $\lim_{x\to\infty} \left(\ln(2x^2+1) - 2\ln(2x - \sqrt{x^2+1})\right)$

Aufgabe 8 (Kurvendiskussion I) *Man bestimme Extrema und Wendepunkte folgender Funktion:*

$$f(x) = \frac{5\sqrt{x}}{4x+3} \tag{1}$$

Aufgabe 9 (Kurvendiskussion II) *Gegeben sei die Funktion* $f(x) = |x^2 - 1| + |x| - 1$ *Man bestimmte: Definitionsbereich, Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Symmeterie, Extrema.*

Aufgabe 10 (Kurvendiskussion III) *Es sei:*

$$f(x) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right| + 1\right) \tag{2}$$

Man bestimme den Definitionsbereich und zeige dass dort stets $f(x) \geq 0$ *gilt. In Welchen Teilintervallen ist* $f(x)$ *streng monoton steigend, in welchen fallend? Man Berechne die Grenzwerte* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ *und* $\lim_{x\to\pm 0} f(x)$.

Aufgabe 11 (Taylorentwicklung) *Man entwickle folgende Funktionen:*

- $f(x) = \exp(\sin(x))$ *bis zur 4. Ordnung um* $x_0 = 0$
- $e^x \cos(x)$ *bis zur 7. Ordnung um* $x_0 = 0$

Aufgabe 12 (Taylorentwicklung und Kreisfunktionen) *Finden Sie die Taylorkoeffizienten von* $sin(x)$ *und* $cos(x)$ *und zeigen Sie, dass gilt:* $sin(x)' = cos(x)$ *und* $cos(x)' = -sin(x)$. *Welchen Satz machen Sie sich hier indirekt zu Nutze?*

Aufgabe 13 (Taylorentwicklung in der Physik) *Laut der speziellen Relativitätstheorie gilt* $E = \gamma mc^2$ *wobei* $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ *ist. Zeigen Sie, indem Sie den Ausdruck* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *bis zur 2. Ordnung um Null entwickeln, dass die Formel bei kleinen Geschwindigkeiten in den Ausdruck für die klassische kinetische Energie plus der Ruheenergie übergeht.*

Aufgabe 14 (Potenzreihen und Taylorentwicklung) *Man setze die Taylorentwicklung für* $\sin(x)$ *und* $\cos(x)$ *ein und berechne den Grenzwert von:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2/2 - \cos(x)}{x\sin(x)} \tag{3}$$

Aufgabe 15 (Taylorentwicklung) *Man entwickle die Funktionen* $f(x) = \frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^3}}$ *bis einschließlich zur 3. Ordnung um* $x_0 = 0$ *um gebe eine Schranke für den relativen Fehler, falls* $|x| < 1/2$ *ist und die Funktion durch das Taylorpolynom 2. Ordnung approximiert wird, an.*