Differentiation und Taylorentwicklung

Thomas Fehm

4. März 2009

1 Differentiation in $\mathbb{R}$

1.1 Grundlagen

Definition 1 (Ableitung einer Funktion) *Es sei f eine Funktion die auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert ist. Es sei $x \in I$. Man sagt **f ist in** x **differenzierbar**, falls folgender Grenzwert existiert:*

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

Wobei h hier sowohl größer als auch kleiner als Null sein kann. $h > 0$ würde formal einen rechtsseitigen Grenzwert und $h < 0$ einen linksseitigen Grenzwert darstellen. Da in der Definition h beliebig sein kann folgt also automatisch, dass rechts- und linksseitiger Grenzwert auch gleich sein müssen wenn die Ableitung in einem Punkt eindeutig sein soll. Es sei außerdem noch angemerkt, dass $f'(x) = lim_{x_0 \to x} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$ eine völlig analoge Definition der Ableitung darstellt.

Wobei wir zuletzt verschiedene Schreibweisen für die Ableitung von f eingeführt haben. Es sollen einige Beispiele folgen, die die obige Definition verdeutlichen.

Beispiel 1

$$f(x) = ax + b \tag{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

$$g(x) = x^n \tag{5}$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \tag{6}$$

$$= \lim_{h \to 0} \Sigma_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} = nx^{n-1} \tag{7}$$

Sind f und g differenzierbar, so gelten folgende Regeln, welche teilweise in der Übung bewiesen werden:

- $(f+g)' = f'(x) + g'(x)$
- $(cf(x))' = cf'(x)$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Produktregel)
- $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ (Kettenregel)
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f'(x)}{g^2(x)}$ falls $g(x) = 0$ (Quotientenregel)

Höhere Ableitungen sind rekursiv definiert: Die n-te Ableitung einer Funktion bekommt man durch die Ableitung der (n-1)-ten Ableitung der Funktion. Abhängig davon, ob die n-te Ableitung einer Funktion noch stetig ist definiert man Mengen an Funktionen $C^n(D)$, wobei alle Funktionen, die auf D definiert sind und deren n-te Ableitung noch stetig ist, in der Menge enhalten sind. Zum Beispiel ist die Funktion $f : x \in \mathbb{R} \to e^x \in \mathbb{R})$ Element der Menge $C^\infty(\mathbb{R})$, weil sie über der Menge aller rationalen Zahlen definiert ist und ihre Ableitungen ($f^{(n)}(x) = e^x$) alle stetig sind. In diesem Zusammenhang spricht man auch von der Glattheit einer Funktion. Je größer dass n in $C^n(D)$ ist, desto glatter ist eine Funktion.

Desweitern gilt, dass jede, in x differenzierbare Funktion, dort auch stetig ist (f Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ f Stetigkeit). Die Umkehrung gilt hingegen nicht. An der Funktion $f(x) = |x|$ kann man sich diesen Sachverhalt sehr schön klar machen (Übung).

Satz 1 (Stetigkeit ist notwendig für Differenzierbarkeit) *Jede in $x \in D$ differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist dort auch stetig.*

Beweis: Wir wenden die Definition der Ableitung in $x \in D$ an: $\lim_{x_0 \to x} f(x_0) - f(x) - (x_0 - x)f'(x) = 0$. *Da* $\lim_{x_0 \to x}(x_0 - x)f'(x) = 0$ *ist muss gelten:* $\lim_{x_0 \to x} f(x_0) - f(x) = 0$ *und damit* $\lim_{x_0 \to x} f(x_0) = f(x)$.

Der Leser mache sich an dieser Stelle klar, dass der Beweis sowohl den links- als auch den rechtsseitigen Grenzwert beinhaltet.

Als nächstes betrachten wir den Zusammenhang zwischen der Ableitung einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion.

Satz 2 (Ableitung der Umkehrfunktion) *Sei $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und $f : x \in X \to f(x) = y \in Y$ eine stetige, streng monotone Funktion, dann existiert eine Umkehrfunktion f^{-1} zu f mit $f^{-1} : y \in Y \to f^{-1}(y) = x \in X$ und es gilt folgender Zusammenhang:*

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{8}$$

Beweis: siehe Übung.

1.2 Einige mehr oder weniger brauchbare Sätze

Zunächst wollen wir einige kurze Sätze betrachten die wir dann später verwenden, um uns Werkzeuge für die Kurvendiskussion zu erarbeiten. Die Anwendung und Bedeutung dieser Sätze sollte in jedem Fall beherrscht werden, da sie für das Rechnen in der Klausur sehr wichtig sind.

Satz 3 (Der Mittelwertsatz) *Ist die Funktion f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und auf dem offenen Intervall $]a, b[$ differenzierbar, dann gibt es mindestens einen inneren Punkt $x_0 \in [a, b]$ mit:*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{9}$$

Um sich die Aussage des Mittelwertsatzes klar zu machen, sollte der Leser Abbildung 1 studieren.

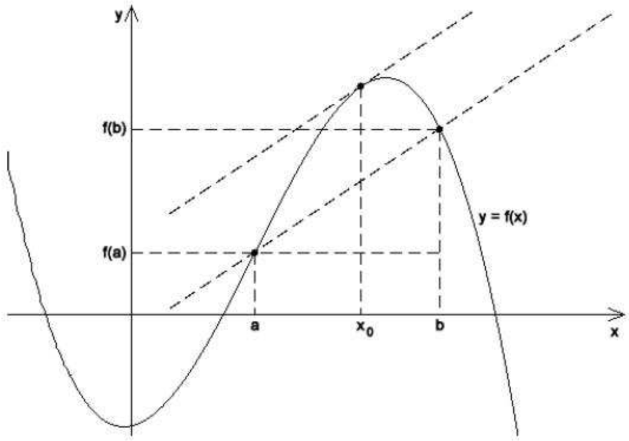

Abbildung 1: Zur Veranschaulichung des Mittelwertsatzes

Satz 4 (Der Satz von Rolle) *Ist die Funktion f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ differenzierbar und gilt außerdem $f(a) = f(b)$. Dann gibt es mindestens einen Punkt x_0 mit der Eigenschaft:*

$$f'(x_0) = 0 \tag{10}$$

Der Leser soll sich auch die Aussage dieses Satz an Abbildung 2 klar machen.

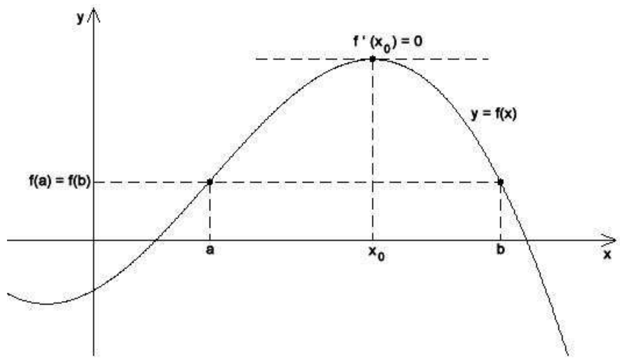

Abbildung 2: Zur Veranschaulichung des Satzes von Rolle

Als nächstes wittmen wir uns dem Problem der Grenzwertbestimmung.

Satz 5 (Die Regel von L'Hospital) *Sind f und g auf dem Intervall $x_0 < x < x_1$ differenzierbare Funktionen, wobei $g'(x) = 0$ mit folgenden Eigenschaften: $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ bzw. $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ für $x \to b$. Dann gilt:*

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_1} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{11}$$

Analoges gilt für $x \to x_0$.

Etwas flappsig könnte man auch sagen bei $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ darf man die Funktion im Zähler und Nenner einfach ableiten. Die Herausforderung bei der Grenzwertberechnung ist dabei oft, das vorhandene Problem so umzuformen, dass man die Regel von L'Hospital anwenden darf (Übung!).

1.3 Kurvendiskussion

Als nächstes bepsrechen wir die Kurvendiskussion. Da es sich hierbei um Techniken handelt, die in grundzügen bereits in der Schule besprochen wurden, werde ich an dieser Stelle nur eine Zusammenfassung aller wichtigen Aussagen geben.

Satz 6 (Monotonie und Ableitung) *Für eine auf dem Intervall I differenzierbare Funktion f gilt:*

- *$f'(x) > 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist auf I echt monoton wachsend*
- *$f'(x) < 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist auf I echt monoton fallend*
- *$f'(x) >= 0$ auf $I \Leftrightarrow f$ ist auf I monoton wachsend*
- *$f'(x) <= 0$ auf $I \Leftrightarrow f$ ist auf I monoton fallend*
- *$f'(x) = 0$ auf $I \Leftrightarrow f$ ist auf I konstant*

Satz 7 (Extremwerte) *Für eine auf dem offenen Intervall I differenzierbare Funktion f gilt:*

$$x_0 \in I \quad \text{lokale Extremstelle von } f \Rightarrow f'(x_0) = 0 \tag{12}$$

Vorsicht! Für den Fall, dass es sich um eine Funktion handelt, die auf einem (einseitig)geschlossenen Intervall definiert ist, können Extrempunkte auch an den Rändern vorkommen, d.h. Randpunkte sind immer als potentielle Kandidaten für Extremstellen in betracht zu ziehen.

Satz 8 (Minima und Maxima) *Ist f auf dem offenen Intervall $I =]a, b[$ zweimal stetig differenzierbar und $f'(x_0) = 0$ mit $x_0 \in I$, dann gilt:*

- *$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 ein lokales Maximum*
- *$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 ein lokales Minimum*

Auch an dieser Stelle sei der Leser noch mals darauf hingewiesen, dass auch Randpunkte mit $f(x_0) \neq$ Maxima oder Minima darstellen können.

Satz 9 (Krümmung) *Ist f auf dem offenen Intervall $I =]a, b[$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt:*

- $f''(x) > 0$ *auf* $I_0 \Rightarrow f$ *ist auf* $I_0 \subseteq I$ *konvex (linksgekrümmt)*
- $f''(x) < 0$ *auf* $I_0 \Rightarrow f$ *ist auf* $I_0 \subseteq I$ *kokav (rechtsgekrümmt)*
- $f''(x_0) = 0$ *und* $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ *hat in* x_0 *einen Wendepunkt*

Wendepunkte können also als Stellen interpretiert werden, an denen die Funktion ihre Krümmung ändert.

1.4 Funktionenfolgen

Als nächstens wollen wir uns mit Funktionenfolgen beschäftigen. Funktionenfolgen spielen in der theoretischen Physik, als Mittel um Differentailgleichungen zu lösen, eine zentrale Rolle. Um sich die wesentliche Idee, des in der Vorlesung besprochenen Satzes klar zu machen, betrachte man folgendes: Wir gehen davon aus, dass eine sich eine Funktion f durch eine (un)endliche Potenzreihe darstellen lässt, deren Koeffizienten noch zu bestimmten sind: $f(x) = \Sigma_{n=0}^{m} a_n x^n$. Der Konvergenzradius sei R. Der Satz aus der Vorlesung sagt jetzt nichts weiter aus, als dass die Ableitung $f'(x)$ durch die Ableitung der Potenzreihe gegeben ist, bzw. dass die Ableitung der Potenzreihe wieder gegen die Ableitung der Funktion konvergiert und dass der Konvergenzradius der selbe bleibt: $f'(x) = \Sigma_{n=0}^{m} n a_n x^{n-1}$. Man beachte dabei, dass man den Laufindex n wieder von Null beginnen lassen kann. Daraus ergeben sich beim rechnen oft enorme Vorteile (Übung!). Das ganze etwas formaler:

Satz 10 (Die Differentiation einer Potenzreihe) *Eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion f ist im offenen Konvergenzintervall $-R < x < R$, $R > 0$, beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen erhält man durch gliedweise Differentiation. Die abgeleiteten Reihen haben sämlicht den konvergenzradius R.*

1.5 Taylor-Entwicklung

Zuletzt wollen wir noch die Taylorentwicklung studieren. In der Physik wird man oft mit dem Problem konfroniert, dass man einen algebraischen Ausdruck hat den man beispielsweise integrieren muss. Dies ist jedoch analytisch oft nicht möglich. Man sucht deshalb Näherungen, die das Verhalten qualitativ richtig beschreiben und mit denen man mathmatisch leichter umgehen kann. Ein erst Schritt wäre die so gennannte Linearisierung. Das heißt, es wird angenommen, dass sich die Funktion in der näheren Umgebung eines Punktes annäherend linear verhält. Um qualitativ das Verhalten eines physikalischen Systems zu studieren ist dies oft schon ausreichend. Dazu betrachten wir die Definition der Ableitung einer Funktion im Punkt x_0:

$$f'(x_0) = lim_{x \to x} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{13}$$

Geht man davon aus, dass man die Funktion nur in der Nähe von x_0 betrachtet, man also die Grenzwertbildung wegfallen lässt, dann kann man nach $f(x)$ auflösen und erhält näherungsweise:

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{14}$$

Man spricht bei der Näherung auch von der sogenannten *Linearen Approximation.*

Es liegt jetzt natürlich nahe zu fragen, ob eine bessere Nährung existiert? Aus dieser Motivation heraus betrachtet man das Integral:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt && (15) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - t) f''(t)dt && (16) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^2 f'''(t)dt && (17) \\ & && (18) \end{aligned}$$

woebei wir hier in jedem Schritt partiell integriert haben. Führt man diesen Prozess weiter, so erhält man schließlich in beliebiger Ordnung eine Nährung von f, die so genannte Taylorentwicklung:

Satz 11 (Die Taylorentwicklung einer Funktion in n-ter Ordnung) *Für jede auf dem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ (n+1)-mal stetig differenzierbare Funktion f und $x_0, x \in I$ gilt:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n+1}(x_0, x) \tag{19}$$

mit dem Restglied:

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_{x}^{x} (x - t)^n f^{n+1}(t)dt = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{20}$$

Die Darstellung des Restglieds erhält man indem man den MIttelwertsatz der Integralrechnung anwendet (Morgen mehr!). Die Entwicklung von f ohne das Restglied $R_{n+1}(x_0, x)$ nennt man auch Taylorpolynom n-ter Ordnung. x_0 nennt man auch das Zentrum der den Entwicklungspunkt. Man kann nun zeigen, dass falls die Funktion f auf dem Intervall I beliebig oft differenzierbar ist, das Taylorpolynom $n - ter$ Ordnung für $n \to \infty$ gegen die Funktion f konvergiert, bzw. dass für das Restglied gilt $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x_0, x) = 0$.

Literatur

[1] K. Meyberg, P. Vachenauer, *Höhere Mathematik 1*, 6. Auflage, München, 2001, Springer-Verlag