Ferienkurs Analysis 1

Tag 2 - Lösungen zu Komplexe Zahlen, Vollständige Induktion, Stetigkeit

Pan Kessel

24. 2. 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen

1.1 Darstellung einer komplexen Zahl

1. Wandeln Sie $z = 2 + 2i$ in Polardarstellung um.
2. Wandeln Sie $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ in die karthesische Darstellung um.
3. Wandeln Sie $z = 1 + 5i$ in Polardarstellung um.
4. Wandeln Sie $z = 1 - 5i$ in Polardarstellung um.
5. Wandeln Sie $z = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ in karthesische Darstellung um.

Lösung:

1. $\phi = \arctan(1) = \frac{pi}{4}$ und $r = 2\sqrt{2}$, daraus folgt $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{pi}{4}}$
2. Es ist am besten man stellt sich diese Zahl in der komplexen Ebene vor. Sie liegt genau auf der imaginären Achse, also $z = 3i$
3. Diese Zahl liegt im 4.Quadranten. Deswegen gilt nach der Vorlesung: $\phi = \arctan(5) \approx 0.43 \cdot \pi$ und $r = \sqrt{5}$. Daher $z = \sqrt{5}e^{i \cdot 0.43\pi}$.
4. Man erkennt das es sich bei dieser Zahl um das komplex konjugierte der vorherigen Zahl handelt also: $z = \sqrt{5}e^{-i \cdot 0.43\pi}$
5. Nach der Vorlesung gilt: $z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

1.2 Bestimmung von Real und Imaginärteil

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von $z = \frac{5+3i}{5+i}$.

Lösung:

$$\frac{(5+3i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{(25+3)+i(15-5)}{25+1} = \underbrace{\frac{14}{13}}_{=Re(z)} + i \underbrace{\frac{5}{13}}_{=Im(z)}$$

1.3 Klausuraufgabe

Geben Sie Real- und Imaginärteil von

1. $$z = \frac{1}{a+ib}$$
2. $$z = \frac{(1-i)^2}{(1+i)^3}$$

an.

Lösung:

1. $$\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

   Also: Re(z)=$\frac{a}{a^2+b^2}$ und Im(z)=$\frac{-b}{a^2+b^2}$.

2.

$$z = \frac{(1-i)^2}{(1+i)^3} = \frac{(1-i)^5}{2^3} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)}{2^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{e^{i\frac{15}{4}\pi}}_{=e^{i\frac{3}{4}}\cdot\underbrace{e^{i\frac{12}{4}\pi}}_{=-1}}) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{=Re(z)} - i \underbrace{\frac{1}{2}}_{=Im(z)}$$

1.4 *Geometrische Interpretaton einer Gleichung

Man schreibe

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = r$$

in die Form

$$|z-m| = \rho \qquad m, \rho \in \mathbb{R}$$

um und interpretiere das Ergebniss geometrisch.

Lösung: Zunächst betrachten wir:

$$|z-m| = \rho \quad \Leftrightarrow \quad (z-m)(z^*-m) = \rho^2 \quad \Leftrightarrow \quad zz^* - (zm + mz^*) + m^2 = \rho^2$$

Wir wollen jetzt die obere Gleichung auf diese Form bringen:

$$|z-1|^2 = r^2 \cdot |z+1|^2$$

$$(z-1)(z^*-1) = r^2(z+1)(z^*+1)$$

$$zz^* - z - z^* + 1 = r^2(zz^* + z + z^* + 1) \quad \Leftrightarrow \quad (1-r^2)|z|^2 - (1+r^2)(z+z^*) = -(1-r^2)$$

Durch hinzufügen eines zusätzlichen Summanden auf beiden Seiten bringen wir die Gleichung auf die obere Form:

$$zz^* - \frac{1+r^2}{1-r^2}(z+z^*) + \left|\frac{1+r^2)}{1-r^2}\right|^2 = -1 + \left|\frac{1+r^2)}{1-r^2}\right|^2$$

$$\left|z - \underbrace{\frac{1+r^2}{1-r^2}}_{=m}\right|^2 = \underbrace{-1 + \left|\frac{1+r^2}{1-r^2}\right|^2}_{=\rho}$$

Es handelt sich um einen Kreis mit Mittelpunkt m und Radius ρ.

1.5 Wurzeln von komplexen Zahlen

1. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung:

$$5z^2 - 2z + 5 = 0 \qquad z \in \mathbb{C}$$

2. Berechen Sie alle Lösungen der Gleichung:

$$z^2 + 2z - i = 0 \qquad z \in \mathbb{C}$$

3. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung:

$$z^3 + i = 0 \qquad z \in \mathbb{C}$$

Lösung:

1. Dieses Problem löst man am besten durch quadratische Ergänzung:

$$5z^2 - 2z + \frac{1}{5} + 5 - \frac{1}{5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt(5)z - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{24}{5} = 0$$

$$\left(z - \frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{24}{25} = \left(\pm i\frac{24}{25}\right)^2$$

Nun sehen wir:

$$z = \pm i\frac{1}{5}\sqrt{24} + \frac{1}{5}$$

Damit haben wir die zwei Lösungen gefunden, die wir nach dem Fundamentalsatz der Algebra erwarten.

2. Auch hier ergänzen wir zunächst quadratisch:

$$z^2 + 2z + 1 = i + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(z+1)^2}_{\equiv \tilde{z}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Wobei wir ganz rechts $1 + i$ in Polardarstellung umgeschrieben haben. Nun können wir analog zum Skript die Wurzeln zu $\tilde{z}$ ziehen.

$$\tilde{\phi}_k = \frac{\pi/4 + k \cdot 2\pi}{2} \qquad k = 0, 1 \Rightarrow \quad \tilde{\phi}_1 = \frac{\pi}{8} \quad \tilde{\phi}_2 = \frac{9}{8}\pi \qquad \tilde{r} = \sqrt{2}$$

Wegen $z + 1 = \tilde{z}$ folgt:

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}} - 1 \qquad z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{9}{8}\pi} - 1$$

3. Hier kann man ganz analog zur Vorlesung vorgehen:

$$z^3 = -i = e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

Deshalb:

$$\phi_k = \frac{\frac{3}{2}\pi + k2\pi}{3} = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{1}{2}\pi \quad , \phi_1 = \frac{7}{6}\pi \quad , \phi_2 = \frac{11}{6}\pi \qquad r = 1$$

1.6 Komplexer Logarithmus

Berechnen Sie $ln(-8 + 6i)$.

Lösung:

$$z = -8 + 6i = 10e^{i(2.5 + k \cdot 2\pi)}$$

Damit erhält man die Lösungen:

$$\ln(z) = \ln(10) + i(2.5 + k \cdot 2\pi) = 2.3 + i(2.5 + k \cdot 2\pi)$$

Der Hauptwert ist also:

$$Ln(z) = 2.3 + 2.5i$$

2 Vollständige Induktion

2.1 Binomische Formel

Beweisen Sie die Binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

mit Hilfe der vollständiger Induktion.

Lösung:

- Induktionsanfang:

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k \cdot b^{n-k} = b + a$$

- Induktionsschritt:

$$(a+b)^{n+1} = \underbrace{(a+b)^n}_{Annahme} \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} \right) \cdot (a+b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} \cdot b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k \cdot b^{n-k+1} + \ldots =$$

Hier haben wir den Index in der ersten Summe 'geshiftet', d.h $k \to k+1$. Das n im Binominalkoeffizenten bleibt durch den Indexshift unverändert. Die Summe muss aber, um dieselbe Anzahl an Summanden zu haben, bis n+1 laufen.

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left\{ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right\}}_{=\binom{n+1}{k}} a^k \cdot b^{n-k+1} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=\binom{n+1}{0}} a^0 \cdot b^{n+1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=\binom{n+1}{n+1}} a^{n+1} \cdot b^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k \cdot b^{n-k+1}$$

q.e.d.

2.2 Summenformel

Beweisen Sie die folgende Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Lösung:

- Induktionsanfang:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

- Induktionsschritt:
$$\underbrace{\sum_{k=1} .k^2}_{Annahme} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 +^1 3n + 6}{6}$$
Das der Zähler dem gewünschten Ergebniss entspricht beweist man am besten indem man rückwärts rechnet:
$$(n+1)(n+2)(2n+3) = (n^2+3n+2)(2n+3) = 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6$$
Damit haben wir alles beweisen.

2.3 Klausuraufgabe

Beweisen Sie
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n}{n+1}$$
durch vollständige Induktion.

Lösung:

- Induktionsanfang:
$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

- Induktionsschritt:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} + \frac{1}{\underbrace{(n+1)^2+n+1}_{(n+1)(n+2)}} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$
q.e.d.

2.4 Summenformel der Binominalkoeffizenten

Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ und es gelte $n \geq k$. Man beweise
$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$
durch vollständige Induktion.

Lösung:
Zunächst einmal stellt sich das Problem, dass wir die richtige Variable finden müssen, die wir zur Induktion benutzen. Dies ist die Variable n, da k nur bis n läuft und somit eine neue Aussage nur auftritt wenn man n erhöht.

- Induktionsanfang: Wir wählen hier den kleinst möglichen Wert für n. Dieser ist laut Aufgabenstellung $n = k$
$$\binom{k+1}{k+1} = 1 = \binom{k}{k}$$

- Induktionsschritt:
$$\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}+\binom{n+1}{k}=\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k}=\binom{n+2}{k+1}$$
Die letzte Gleichung folgt aus der allgemeinen Konstruktionsvorschrift der Binomianalkoeffizenten:
$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$$
Was man sich am besten mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks klarmacht.
q.e.d.

2.5 Abschätzung Potenzfunktion, Exponentialfunktion

1. Beweisen Sie zunächst die Hilfsaussage
$$2n+1<2^n \qquad n\in\mathbb{N} \quad ,n\geq 5$$
2. Überzeugen Sie sich, dass die Aussage
$$n^2<2^n \qquad (*)$$
für $n=1,5$ gilt, nicht aber für $n=2,3,4$.
3. Beweisen Sie (*) induktiv mit geeignetem Induktionsanfang.
4. Was sagt dieser Satz anschaulich?

Lösung:

1. Wir beweisen mit vollständiger Induktion:
   - Induktionsanfang: n=5: $11<2^5$
   - Induktionsschritt:
   $$2(n+1)+1=2n+1<2^n+2<2\cdot 2^n<2^{n+1}$$
   Dabei haben wir die Induktionsannahme benutzt und die Vorgabe $n\leq 5$. Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.
2. Dies sieht man durch Einsetzen.
3. - Induktionsanfang:
   Hier wählt man n=5, da wir vorher gezeigt habe, dass die Aussage zwar für n=1 gilt nicht aber für n=2,3,4. Deswegen kann der Induktionsbeweis nur für $n\geq 5$ Erfolg haben.
   $$5^2=25<32=2^5$$
   - Induktionsschritt:
   $$(n+1)^2=n^2+2n+1<2^n+2n+1$$
   Jetzt müssen wir die Hilfsaussage aus der ersten Teilaufgabe benutzen.
   $$2^n+2n+1<2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}$$
   q.e.d.
4. Der Satz besagt, dass exponentielles Wachstum (also Wachstum der Form a^x) schneller ist als Wachstum, das sich wie eine Potenzfunktion (x^n) verhält.

2.6 Gaußsche Summenformel

Man beweise:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad n \in \mathbb{N}$$

per vollständige Induktion.

Lösung:

- Induktionsanfang:

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

- Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k = n+1+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

q.e.d.

2.7 Eine weitere Summenformel des Binominalkoeffizenten

- Beweisen Sie die Formel für $n \in \mathbb{N}$

$$2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$$

- Beweisen Sie die Formel für $n \in \mathbb{N}$

$$0 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \cdot (-1)^n$$

Lösung:
Diese Aufgabe soll lehren, dass nicht alles was nach Induktionsbeweis aussieht, auch einer ist. Die Aufgabenstellung verlangt keine Induktion.

- $$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$$

  wobei wir die binomische Formel verwendet haben.

- $$0 = (1-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}(-1)^k$$

3 Stetigkeit

3.1 Grenzwertbestimmung von Funktionen

Bestimmen Sie wenn möglich die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{3x+9}{x^2-9}$
2. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{3x+9}{x^2-9}$
3. $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{x}{|x|}$

4. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x}{|x|}$
5. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+x}{x^2-x-2}$
6. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-5x+4}{x^2-2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

Lösung:

1. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{3x+9}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{3}{x-3}$ existiert nicht.
2. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{3x+9}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{3}{x-3} = \frac{-1}{2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{x}{|x|} = -1$
4. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x}{|x|} = 1$
5. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x}{x-2} = \frac{1}{3}$
6. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-5x+4}{x^2-2} = \frac{16}{7}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$