1 Komplexe Zahlen

1.1 Darstellung einer komplexen Zahl

1. Wandeln Sie $z = 2 + 2i$ in Polardarstellung um.
2. Wandeln Sie $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ in die karthesische Darstellung um.
3. Wandeln Sie $z = 1 - 5i$ in Polardarstellung um.
4. Wandeln Sie $z = 1 + 5i$ in Polardarstellung um.
5. Wandeln Sie $z = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ in karthesische Darstellung um.

1.2 Bestimmung von Real und Imaginärteil

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von $z = \frac{5+3i}{5+i}$.

1.3 Klausuraufgabe

Geben Sie Real- und Imaginärteil von

1. $$z = \frac{1}{a+ib}$$
2. $$z = \frac{(1-i)^2}{(1+i)^3}$$

an.

1.4 *Geometrische Interpretaton einer Gleichung

Man schreibe

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = r$$

in die Form

$$|z - m| = \rho \qquad m, \rho \in \mathbb{R}$$

um und interpretiere das Ergebniss geometrisch.

1.5 Wurzeln von komplexen Zahlen

1. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung:
$$5z^2 - 2z + 5 = 0 \qquad z \in \mathbb{C}$$
2. Berechen Sie alle Lösungen der Gleichung:
$$z^2 + 2z - i = 0 \qquad z \in \mathbb{C}$$
3. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung:
$$z^3 + i = 0 \qquad z \in \mathbb{C}$$

1.6 Komplexer Logarithmus

Berechnen Sie $ln(-8+6i)$.

2 Vollständige Induktion

2.1 Binomische Formel

Beweisen Sie die Binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

mit Hilfe der vollständiger Induktion.

2.2 Summenformel

Beweisen Sie die folgende Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

mit Hilfe der vollständigen Induktion.

2.3 Klausuraufgabe

Beweisen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n}{n+1}$$

durch vollständige Induktion.

2.4 Summenformel der Binominalkoeffizenten

Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ und es gelte $n \geq k$. Man beweise

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

durch vollständige Induktion.

2.5 Abschätzung Potenzfunktion, Exponentialfunktion

1. Beweisen Sie zunächst die Hilfsaussage
$$2n+1 < 2^n \qquad n \in \mathbb{N} \quad , n \geq 5$$
2. Überzeugen Sie sich, dass die Aussage
$$n^2 < 2^n \qquad (*)$$
für $n = 1, 5$ gilt, nicht aber für $n = 2, 3, 4$.
3. Beweisen Sie (*) induktiv mit geeignetem Induktionsanfang.
4. Was sagt dieser Satz anschaulich?

2.6 Gaußsche Summenformel

Man beweise:
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad n \in \mathbb{N}$$
per vollständige Induktion.

2.7 Eine weitere Summenformel des Binominalkoeffizenten

- Beweisen Sie die Formel für $n \in \mathbb{N}$
$$2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$$
- Beweisen Sie die Formel für $n \in \mathbb{N}$
$$0 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \cdot (-1)^n$$

3 Stetigkeit

3.1 Grenzwertbestimmung von Funktionen

Bestimmen Sie wenn möglich die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3x+9}{x^2-9}$
2. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{3x+9}{x^2-9}$
3. $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{x}{|x|}$
4. $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{x}{|x|}$
5. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+x}{x^2-x-2}$
6. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3-5x+4}{x^2-2}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$