Ferienkurs Analysis 1

Tag 2 - Komplexe Zahlen, Vollständige Induktion, Stetigkeit

Pan Kessel

24. 2. 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen **2**
- 1.1 Grundlagen . . . 2
  - 1.1.1 Typische Rechenaufgabe . . . 3
- 1.2 Verschiedene Darstellung einer komplexen Zahl . . . 4
  - 1.2.1 Polardarstellung . . . 4
  - 1.2.2 Trigonometrische Darstellung . . . 6
- 1.3 Rechnen mit Komplexen Zahlen . . . 6
  - 1.3.1 Multiplikation und Addition . . . 6
  - 1.3.2 Komplexe Wurzel . . . 7
  - 1.3.3 Komplexer Logarithmus . . . 7

2 Vollständige Induktion **8**
- 2.1 Beispiel zur vollständigen Induktion . . . 8

3 Stetigkeit **8**
- 3.1 Wichtige Sätze über stetige Funktionen . . . 11

1 Komplexe Zahlen

1.1 Grundlagen

Es existiert eine Bijektion zwischen den folgenden Mengen:

$$\mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{C}$$

Ohne dies formal mathematisch herzuleiten, kann man sich dies intutiv klarmachen. Der Basisvektor $\vec{e}_y$ entspricht der Zahl $i = \sqrt{-1}$ und die reele 1 entspricht $\vec{e}_x$. Also gilt z.B.:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1 + 2i$$

Man bezeichnet den Faktor vor der **imaginären Einheit** i (entspricht dem y-Achseabschnitt im $\mathbb{R}^2$) als **Imaginärteil**, z.B.

$$Im(1 + 2i) = 2$$

und den Faktor vor der 1 als **Realteil**

$$Re(3 \cdot 1 + 2i) = 3$$

Mit diesen Definitionen kann man $z \in \mathbb{C}$ schreiben als

$$z = Re(z) + i \cdot Im(z)$$

Die komplexen Zahlen bilden also eine Ebene dargestellt in Abbildung(1).

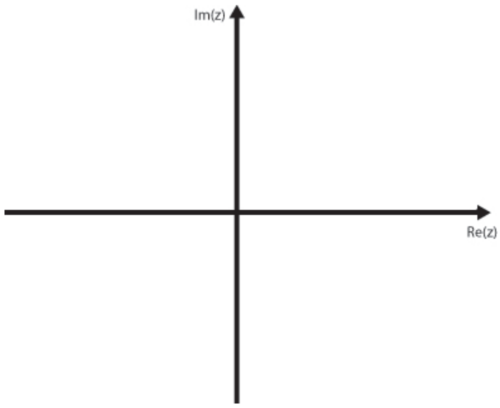

Abbildung 1: Komplexe Ebene

Als zu $z \in \mathbb{C}$ **komplex konjugierte Zahl** z^* bezeichnet man:

$$z^* = Re(z) - i \cdot Im(z)$$

z.B.

$$(6 + 5i)^* = 6 - 5i$$

Wichtige Identitäten sind:

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) \tag{1.1}$$

Dies kann man sich mit der Zeichnung in Abbildung(3) klar machen.

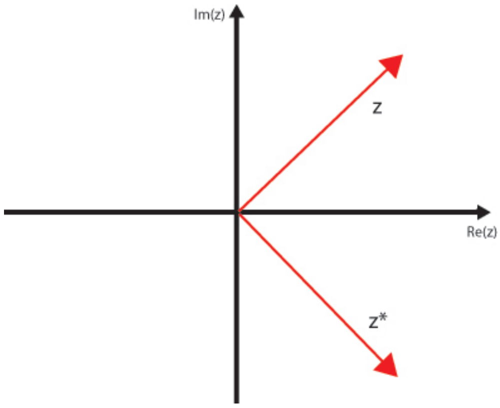

Abbildung 2: Komplexe Konjugation

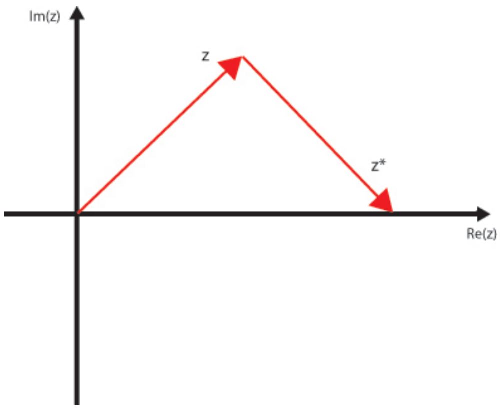

Abbildung 3: Identität für den Realteil

$$Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*) \tag{1.2}$$

Auch dies ist klar wenn man Abbildung(4) betrachtet.

$$|z|^2 = Im(z)^2 + Re(z)^2 \tag{1.3}$$

Dies folgt aus dem Satz von Pythagoras vgl. Abbildung(5).

$$|z|^2 = z \cdot z^* \tag{1.4}$$

Das ist richtig, denn

$$(Re(z) + iIm(z))(Re(z) - iIm(z)) = Re(z)^2 + Im(z)^2$$

Diese Identitäten sind quasi die Mitternachtsformeln der komplexen Zahlen. Man sollte sie auswendig lernen.

1.1.1 Typische Rechenaufgabe

Bestimmen Sie den Re(z) und Im(z) von

$$z = \frac{6 + i5}{1 + i}$$

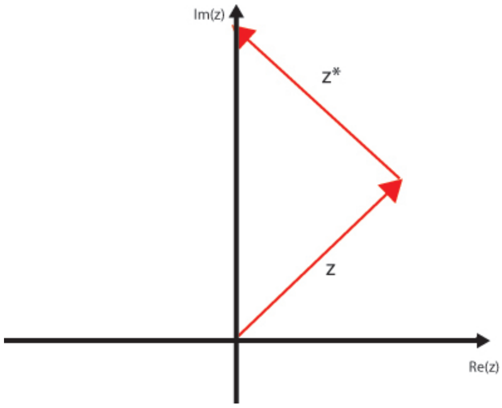

Abbildung 4: Identität für den Imaginärteil

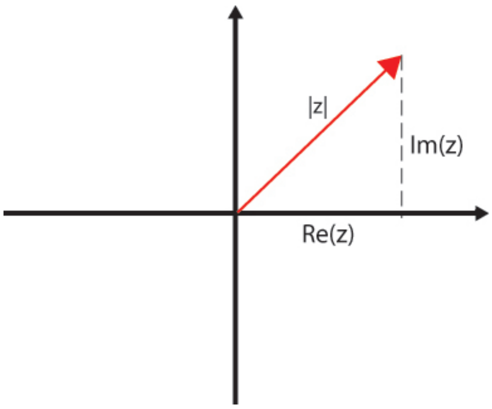

Abbildung 5: Identität für den Betrag

Vorgehen: Man muss die komplexe Zahl auf einen Ausdruck mit einer imaginären Einheit reduzieren. Dazu multiplizieret man mit dem komplex Konjugierten des Nenners:

$$\frac{(6+i5)(1-i)}{\underbrace{(1+i)(1-i)}_{n\cdot n^*=|n|^2}} = \frac{6+5+i(5-6)}{2} = \frac{11}{2} - i\frac{1}{2}$$

Daraus kann man ablesen $Re(z) = \frac{11}{2}$ und $Im(z) = \frac{1}{2}$.

1.2 Verschiedene Darstellung einer komplexen Zahl

1.2.1 Polardarstellung

$\mathbb{R}^2$ kann in Polarkoordinaten dargestellt werden vgl. Abbildung(6). Analog kann man dies auch für die komplexen Zahlen.

$$\vec{v} = r \cdot \vec{e}_r + \phi \cdot \vec{e_\phi} \in \mathbb{R}^2 \qquad \leftrightarrow \qquad z = r \cdot e^{i\phi} \in \mathbb{C}$$

Abbildung(6) legt nahe:

$$r = |z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} \tag{1.5}$$

$$\phi = \arctan\frac{Im(z)}{Re(z)} \tag{1.6}$$

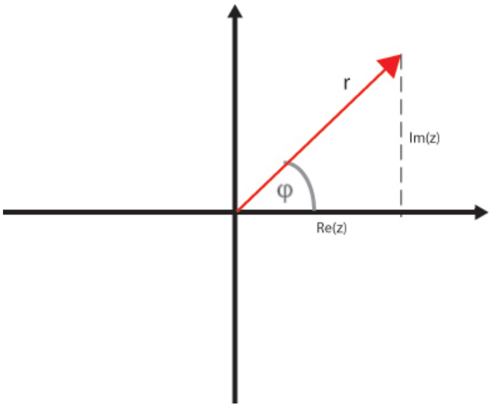

Abbildung 6: Polardarstellung

Beispiel:
Rechnen Sie $z = 1 + i$ in Polarform um.

$$\phi = \arctan 1 = \pi/4$$

$$|z| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

Aber:
$z = -1 + i$

$$\phi = \arctan -1 = -\frac{1}{4}\pi$$

Wie man aus Abbildung(7) erkennt ist dies aber falsch. Das richtige Ergebnis erhält man so:

$$\phi = \arctan -1 + \pi = \frac{3}{4}\pi$$

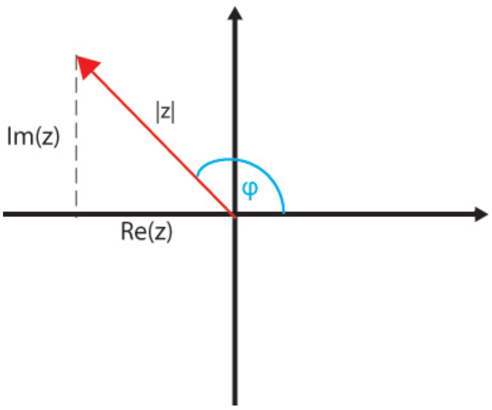

Abbildung 7: Polardarstellung von z=-1+i

Allgemein gilt: Man musss die in Abbildung(8) eingezeichneten Formeln für die unterschiedlichen Quadranten benutzen.

Man definiert $\phi = \arg z$.

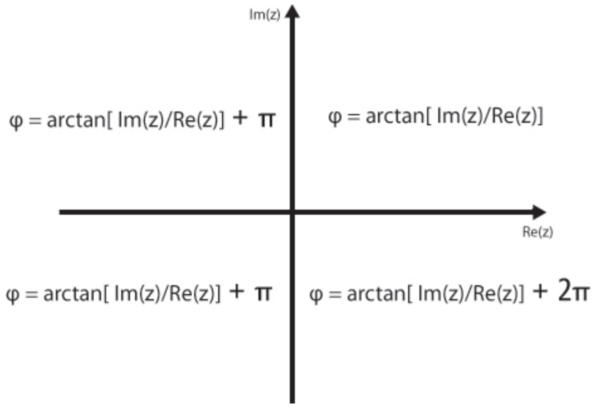

Abbildung 8: Umrechnungsformeln für die verschiedenen Quadranten

1.2.2 Trigonometrische Darstellung

Bei der trigonometrischen Darstellung handelt es sich um eine 'Mischform' aus Polardarstellung und karthesischer Darstellung.

$$z = r(\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$$

Wobei r,ϕ genauso berechnet werden wei oben bei der Polardarstellung. Die trigonometrische Darstellung hilft beim Umrechnen von Polar in karthesische Darstellung, z.B.

$$3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3(\underbrace{\cos\pi/2}_{=0} + i\,\underbrace{sin\frac{\pi}{2}}_{=1}) = 3i$$

1.3 Rechnen mit Komplexen Zahlen

1.3.1 Multiplikation und Addition

Multiplikationen führt man am besten in Plarform aus, denn es gilt:

$$r_1 e^{i\phi_1} \cdot r_2 e^{i\phi_2} = (r_1 r_2) e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$

Daher kann man eine komplexe Zahl als eine Drehstreckung auffassen.

Additionen führt man am besten in karthesischer Darstellung aus:

$$(Re(z_1) + i \cdot Im(z_1)) + (Re(z_2) + i \cdot Im(z_2)) = (Re(z_1) + Re(z_2)) + i\,(Im(z_1) + Im(z_2))$$

Graphisch ist dies in Abbildung(9) dargestellt.

Klausuraufgabe: Polardarstellung von $(-1+i)^6$. $\phi \in (-\pi;\pi]$

- Polardarstellung von $-1+i$:

$$\phi = \pi + \arctan -1 = \frac{3}{4}\pi$$
$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

- $(-1+i)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\cdot 6\cdot\frac{3}{4}\pi} = 8e^{i\cdot 4.5\pi} = 8e^{i\cdot\frac{1}{2}\pi} \cdot \underbrace{e^{i\cdot 2\cdot 2\pi}}_{=1} = 8e^{i\cdot\frac{1}{2}\pi}$

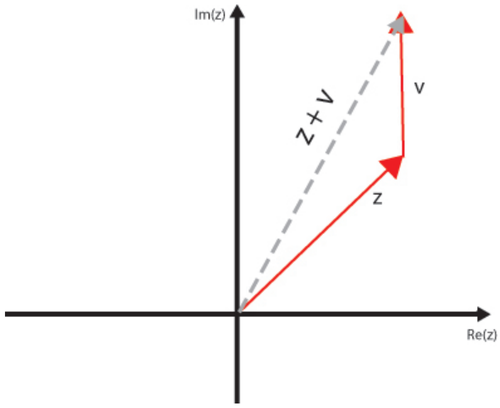

Abbildung 9: Addition zweier komplexer Zahlen

1.3.2 Komplexe Wurzel

Wir wollen Gleichungen der From $z^n = z_0$ lösen. Dazu schreiben wir $z = r \cdot e^{i\phi}$ und benutzen die einfachen Multiplikationseigenschaften der Polardarstellung.

$$\left(r \cdot e^{i\phi}\right)^n = r_0 \cdot e^{i\phi_0} \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[n]{r_0} \qquad \phi \cdot n = \phi_0 + k \cdot 2\pi \quad k = 0, 1, ..n-1$$

Dazu ein Beispiel:

$$z^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad (r \cdot e^{i \cdot \phi})^3 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$$
$$3\phi = 0 + k \cdot 2\pi \qquad \phi = k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2$$
$$r = 1$$

Das lässt sich wie in Abbildung(10) visualisieren.

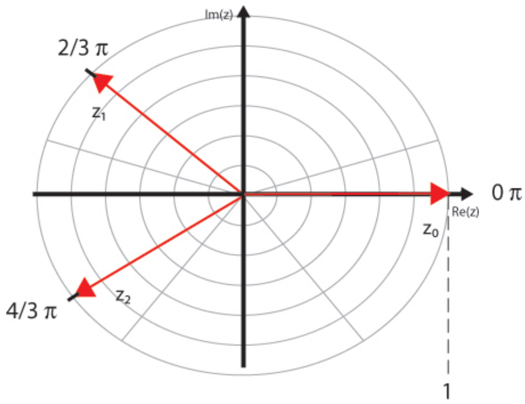

Abbildung 10: Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$

1.3.3 Komplexer Logarithmus

Für $x, a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln a$$

Außerdem gilt für diese die folgende Identität

$$\ln x \cdot y = \ln x + \ln y$$

Nun wollen wir das für komplexe Zahlen $z = r\exp\left(i\left(\phi + k\cdot 2\pi\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ anwenden.

$$\ln z = \ln\left(re^{i(\phi+k\cdot 2\pi)}\right) = \ln(r) + i\cdot(\phi + k\cdot 2\pi)$$

Für $k = 0$ erhält man den Hauptwert $Ln(z)$:

$$Ln(z) = \ln r + i\phi \qquad (0 \leq \phi < 2\pi)$$

Die übrigen Werte heißen Nebenwerte:

$$ln(z) = Ln(z) + k\cdot 2\pi i$$

2 Vollständige Induktion

Hierbei handelt es sich um ein Beweisprinzip der Mathematik. Man stelle sich eine Reihe an Dominosteinen vor. Will man herauskriegen ob alle Dominosteine umfallen würde, wenn man den ersten Stein umwirft, kann man das wie folgt überprüfen. Man zeigt zunächst, dass der erste Stein umfällt und dabei den nächsten Stein trifft. Dann zeigt man, dass wenn ein beliebiger Stein in der Reihe umfällt, er ebenfalls seinen Nachfolger umwirft. Damit hat man offensichtlich gezeit, dass alle Dominosteine umfallen werden. Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion ist also:
Eine Aussage $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ falls:

- Falls A(1) erfüllt ist. Dies nennt man den **Induktionsanfang**
- Falls A(n+1) erfüllt ist, wenn man annimmt das A(n) erfüllt ist. **Induktionsschritt**

Formal folgt dieses Prinzip daraus, dass man $\mathbb{N}$ als Schnittmenge aller Induktiven Mengen definiert.

2.1 Beispiel zur vollständigen Induktion

Wir beweisen die sog. Bernoullische Ungleichung:

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

für $x > -1$, $x \neq 0$ und $n \geq 2$.

Beweis:

- Induktionsanfang:
$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$$
- Induktionsschritt: Nach Vorraussetzung ist $1 + x > 0$. Es gelte die Aussage für n.
$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n > (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 > 1 + (n+1)x$$
q.e.d.

3 Stetigkeit

Fast alle Funktionen in der Physik sind stetig, z.B. die Wellenfunktion in der Quantenmechanik $\psi(\vec{x})$, Potential $\phi(\vec{x})$ in der Elektrodynamik

Natura non facit saltus. (lat.: Die Natur macht keine Sprünge.)

In der Analysis ist es sehr wichtig die Eigenschaften stetiger Funktionen zu kennen, da diese gewissermaßen ein Sammelbecken bilden für Funktionen, die das obrige Prinzip erfüllen.
Also: Was ist Stetigkeit?
Eine sehr unprezise und dennoch äußerst Hilfreiche 'Definition' ist die folgende:

Eine Funktion ist stetig, wenn man sie ohne abzusetzen zeichnen kann.

Um diese Definition zu formalisieren, suchen wir Fälle in denen die obrige 'Definition' NICHT erfüllt ist (Abbildungen 11,12 und 13):

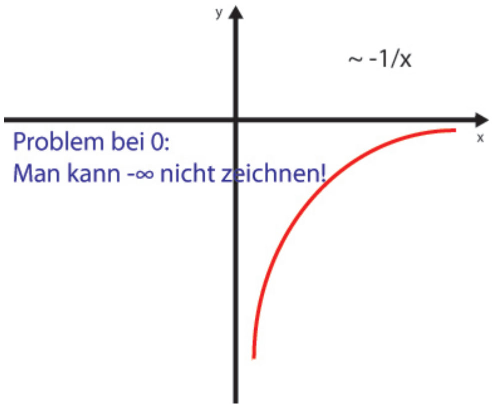

Abbildung 11: Singularität bei 0

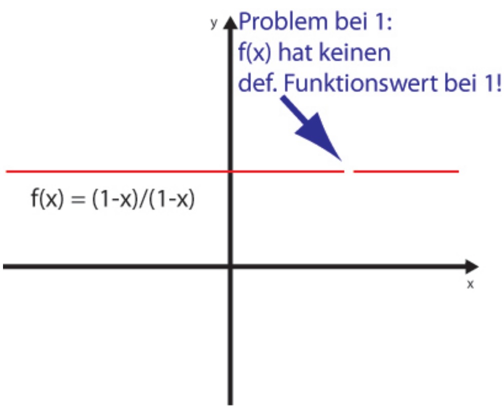

Abbildung 12: Lücke im Definitonsbereich

Was sind also die Probleme?

- Grenzwert für x_0 existiert nicht, wie in
  1. Abbildung (11), da dort die Funktion bei $x_0 = 0$ unbeschränkt.
  2. Abbildung (13), da dort Rechter- und Linkergrenzwert nicht übereinstimmen.
- Grenzwert existiert, stimmt aber nicht mit Funktionswert überein, wie in
  1. Abbildung (12), da dort $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{1-x} = 1$, aber der Funktionswert an dieser Stelle ist nicht definiert.

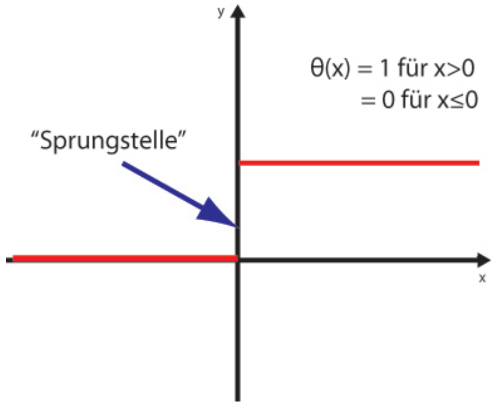

Abbildung 13: Sprungstelle

Also ist für die formale Definition der Stetigkeit der Grenzwertbegriff einer Funktion von zentraler Bedeutung.

Wir schreiben $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ falls $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$ ein innerer Punkt, f auf $I \setminus \{a\}$ definiert (also eventuell nicht in a) und zu jedem $\epsilon > 0$ ein (von ϵ abhängiges) $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\forall x \quad mit \quad 0 < |x - a| < \delta \quad ist \quad |f(x) - A| < \epsilon$$

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist stetig in a, wenn

1. f in a einen Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ besitzt.
2. Der Grenzwert gleich dem Funktionswert in dieser Stelle ist (dieser muss insbesondere definiert sein): $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A = f(a)$

Beispiel: Stetige Ergänzung

$f(x) = \frac{1-x}{1-x}$ ist unstetig bei $x_0 = 1$, da der Grenzwert zwar existiert

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1-x} = \lim_{x \to 1} 1 = 1$$

aber $f(1)$ nicht definiert ist und somit die zweite Bedingung in der Definition der Stetigkeit nicht erfüllt ist. Man kann aber eine sog. stetig ergenzte Funktion $\tilde{f}(x)$ definieren:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 1 \\ f(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Bei dieser Funktion gilt offensichtlich $\lim\limits_{x \to 1} \tilde{f}(x) = 1 = \tilde{f}(1)$ und diese ist damit stetig!

Kompositionen stetiger Funktionen f,g sind stetig:

$$f(x) + g(x), \qquad f(x) \cdot g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0) \qquad (f \circ g)(x)$$

3.1 Wichtige Sätze über stetige Funktionen

- Eine Funktion f ist in x_0 genau dann stetig, wenn für jede Folge x_n mit $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt:
$$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$
- $f : I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 und $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$, dann existiert eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ so dass $\forall x \in U_\epsilon(x_0) \cap I$ gilt:
$$f(x) > 0 \quad (f(x) < 0)$$
- Zwischenwertsatz: $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig: $f(a) < c < f(b)$ dann gibt es ein $x_0 \in [a; b]$ mit $f(x_0) = c$

All diese Aussagen würde man intuitiv von einer Funktion erwarten, die man ohne abzusetzen zeichnen kann.