Repetitorium Analysis 1 für Physiker WS08/09
Montag - Folgen und Reihen
Musterlösung

Thomas Blasi

1. **Verständnisfragen**

   (a) Sind folgende Aussagen richtig oder falsch:

   i. Jede konvergente Folge hat einen Grenzwert.
   Richtig.

   ii. Der Grenzwert einer Folge kann sich ändern, wenn man endlich viele Folgenglieder abändert.
   Falsch. Sei $\pi(n)$ eine Permutation, die endlich viele Folgenglieder vertauscht, (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Sei (b_n) die abgeänderte Folge. Da die ursprüngliche Folge konvergiert gibt es ein $N(\epsilon)$ derart, dass für alle $n \geq N(\epsilon)$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$. Wähle also nun $N_\pi(\epsilon) := \max\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(N(\epsilon) - 1)\} + 1$. Dann gilt für alle $n \geq N_\pi(\epsilon)$ dass $|b_n - a| < \epsilon$. D.h. die abgeänderte Folge hat den gleichen Grenzwert.

   iii. Jede Nullfolge ist eine konvergente Folge.
   Richtig. Jede Nullfolge konvergiert gegen Null.

   iv. Jede konvergente Folge ist beschränkt.
   Richtig. Vgl. Satz 6 aus der Vorlesung.

   v. Seien (a_n), (b_n) zwei Folgen, dann gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n)+\lim_{n\to\infty}(b_n)$.
   Falsch. Die Aussage stimmt jedoch für zwei konvergente Folgen.

   vi. Die Summe zweier divergenter Folgen ist divergent.
   Falsch. Sei $a_n = n$, $b_n = -n$. Dann gilt für die Summe $a_n + b_n = 0$.

   vii. Es gibt Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ die nicht konvergieren.
   Falsch. Vollständigkeitsaxiom.

   viii. Teilfolgen von Teilfolgen einer Folge sind Teilfolgen der ursprünglichen Folge.
   Richtig.

   ix. Jede Folge hat einen Häufungspunkt.
   Falsch. Z.B. hat die Folge $a_n = n$ keinen Häufungspunkt.

   x. Jede konvergente Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.
   Falsch. Jede konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt.

   xi. Der Wert einer Reihe ändert sich nicht, wenn man endlich viele Summanden abändert.
   Falsch. Die Aussage wird jedoch für absolut konvergente Reihen richtig.

   xii. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist (a_n) eine Cauchyfolge.
   Richtig. (a_n) ist dann sogar eine Nullfolge.

   xiii. Wenn (a_n) Cauchyfolge, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
   Falsch.

   xiv. Wenn (a_n) Nullfolge, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
   Falsch. (a_n) Nullfolge ist nur eine notwendige Bedingung für die konvergenz der Reihe.

   xv. Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
   Falsch. Die Multiplikation zweier absolut konvergenter Reihen erfolgt über das Cauchy-Produkt.

   (b) Geben Sie Beispiele an:

i. Für eine beschränkte Folge die nicht konvergiert.
Z.B. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$. Es gilt $|a_n| \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits divergiert die Folge. Dies sieht man wie folgt: Angenommen, die Folge (a_n) konvergiere gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Dann gibt es nach Definition zu $\epsilon := 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \ge N$. Für alle $n \ge N$ folgt dann nach der Dreiecksungleichung: $2 = |a_{n+1} - a| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \le |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < 1 + 1 = 2$ Widerspruch.

ii. Für eine unbeschränkte Folge mit konvergenter Teilfolge.
Z.B. die Folge $(0, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \dots)$ mit $a_{2n} = n$ und $a_{2n+1} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

iii. Für eine konvergente Reihe die nicht absolut konvergiert.
Z.B. die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

iv. Für eine divergente Reihe $\sum a_n$, wobei (a_n) eine Nullfolge ist.
Z.B. die harmonische Reihe.

v. Für eine Reihe die konvergiert, aber nicht das Quotientenkriterium erfüllt.
Z.B die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

2. **Folgen**

(a) Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz. Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

i. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{8n+2}{4n+17}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{8n+2}{4n+17} = \lim_{n\to\infty} \frac{8 + \frac{2}{n}}{4 + \frac{17}{n}} = \frac{8 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}}{4 + \lim_{n\to\infty} \frac{17}{n}} = 2$$

ii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (\sqrt{n^2+n} - n)$.

$$\text{Es gilt: } a_n = (\sqrt{n^2+n} - n) = \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{(n^2+3n) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n}$$
$$= \frac{3n}{\sqrt{n^2+3n} + n} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1}$$
$$\text{Somit gilt: } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}} + 1} = \frac{3}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{3}{n}} + 1}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{1 + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}} + 1} = \frac{3}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{3}{2}$$

iii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt{n^4 + 12n^2 + 1} - n^2 + 2$

$$\text{Es gilt: } a_n = \underbrace{\sqrt{n^4+12n^2+1}}_{\alpha} - \underbrace{(n^2-2)}_{\beta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta} = \frac{n^4 + 12n^2 + 1 - 4 - n^4 + 4n^2}{\sqrt{n^4+12n^2+1} + n^2 - 2}$$
$$= \frac{16n^2 - 3}{\sqrt{n^4+12n^2+1} + n^2 - 2} = \frac{16 - \frac{3}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{12}{n^2} + \frac{1}{n^4}} + 1 - \frac{2}{n^2}}$$
$$\text{Somit gilt: } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{16 - \frac{3}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{12}{n^2} + \frac{1}{n^4}} + 1 - \frac{2}{n^2}} = \frac{16}{\sqrt{1}+1} = 8$$

iv. $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$.

$$\text{Es gilt: } a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2}$$

$$\text{Somit gilt: } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

(b) Bestimmen Sie die Grenzwerte und Häufungspunkte. Falls die Folge mehr als einen Häufungspunkt hat, geben Sie konvergente Teilfolgen an.

i. $a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^n$ für $k \in \mathbb{Z}$ (*Hinweis:* Verwenden Sie, dass für jede Nullfolge x_n mit $x_n \neq 0$ und $x_n > -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$)

$$\text{Es gilt: } a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^k$$

$$\text{Somit gilt: } \lim_{n\to\infty} a_n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^k = e^k$$

ii. $a_n = \frac{\cos n}{n}$

Wir benutzen den Einschnürungssatz für $a_n := -\dfrac{1}{n}$ und $b_n := \dfrac{1}{n}$.

Da $-1 \leq \cos x \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Da $\dfrac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ folgt mit dem Einschnürungssatz $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$

iii. $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

Die Folge (a_n) hat drei Häufungspunkte $\{-1, 0, 1\}$.

Zu diesen Häufungswerten konvergente Teilfolgen sind

$$a_{4k+3} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) = -1$$

$$a_{2k} = \sin(\pi k) = 0$$

$$a_{4k+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1$$

(c) Man zeige:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Beweis. Sei $a_n = \sqrt[n]{n} = 1$. Da $a_n \geq 1$, ist $b_n := a_n - 1 \geq 0$. Wir benutzten den *Binomischen Satz*,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Dabei sind die *Binomialkoeffizienten* definiert durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Damit erhalten wir

$$n = a_n^n = (1+b_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k \geq 1 + \binom{n}{2} b_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$$

Daraus folgt

$$0 \leq b_n^2 \leq \frac{2}{n} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Mit dem Einschnürungssatz folgt die Behauptung.

(d) Man berechne:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}},$$

d.h. den Limes der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. (*Hinweis:* Um Aussagen über rekursiv definierte Folgen zu treffen benötigt man das Prinzip der vollständigen Induktion.)

Idee: Zeige zunächst die Folge ist monoton steigend und beschränkt. Daraus folgt die Konvergenz. Dies geschieht beide Male durch vollständige Induktion.

Induktionsvoraussetzung: $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: Es sei $n = 0$. Dann ist $a_n = a_0 = 1 < \sqrt{2} = a_1 = a_{n+1}$.
Induktionsschritt: Es gelte $a_n \leq a_{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $1 + a_n \leq 1 + a_{n+1}$, und da $a_n \geq 0$ gilt, ist somit auch $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+a_{n+1}} = a_{n+2}$. Also gilt die Aussage auch für $n + 1$.

Induktionsvoraussetzung: $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: Es sei $n = 0$. Dann ist $a_0 = 1 < 2$.
Induktionsschritt: Es gelte $a_n \leq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
So ist auch $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+2} \leq 2$. Also gilt die Aussage auch für $n + 1$.

Also ist (a_n) monoton wachsend und beschränkt. Folglich existiert der Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$, und es gilt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_n} = \sqrt{1+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{1+a}$$
$$\Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Da $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ ist, aber $a_n > 0 \Rightarrow a \geq 0$ gilt, ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(e) Beweisen Sie Satz 6 aus der Vorlesung:
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung $|a_n - a| \geq |a_n| - |a|$, dass $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$ für $n \geq N$. Wir setzten $M := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$. Damit gilt $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. **Reihen**

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz:

i. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot \frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{4}{3}$$

Somit konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$ absolut.

ii. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ mit $x \in \mathbb{R}$

Nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0 \geq |x|$. Für alle $n \geq n_0$ gilt somit:

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!)} x^{2n+2}}{\frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}} \right| = \left| \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} x^2 \right| = \frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} \leq \frac{|x|^2}{4n^2} \leq \frac{|x|^2}{4n_0^2} \leq \frac{1}{4} := \theta < 1$$

Somit konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ nach dem Qutientenkriterium absolut, und zwar für alle $x \in \mathbb{R}$.

iii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n$

Für $n \geq 2$ ist

$$0 < \left| (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n \right| = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$ als geometrische Reihe konvergiert, konvergiert folglich $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n$ nach dem Majorantenkriterium absolut.

iv. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 3} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2} \geq \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Wir haben also eine divergierende Minorante. Somit divergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 3}$.

v. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^{\frac{5}{2}}}$

Da $-1 < \sin x < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left| (-1)^n \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^{\frac{5}{2}}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}.$$

Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ konvergiert, konvergiert also nach dem Majorantenkriterium $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^{\frac{5}{2}}}$ absolut.

vi. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Um die Divergenz der harmonischen Reihe zu zeigen betrachten wir folgende Partialsummen:

$$S_{2^k} = \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\sum_{n=2^i+1}^{2^{i+1}} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right).$$

Da die Summe jeder Klammer $\geq \frac{1}{2}$ ist, folgt $S_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$. Also ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt, d.h. es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

(b) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

Für alle $n \geq 1$ hat man die Zerlegung

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Also ist

$$\begin{aligned} s_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right). \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{2}.$$

ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$

Man verwende hier die Exponentialreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 2(e^2-1)$$

iii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n-2)}$

Der Wert dieser Reihe beträgt $\frac{1}{3}$. Die Lösung erfolgt völlig analog zur Aufgabe i.

iv. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{\frac{n}{2}} 2^{1-n}$

Diese Reihe kann auf die geometrische Reihe zurückgeführt werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{\frac{n}{2}} 2^{1-n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1\right] = 2\left[\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} - 1\right] = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen:

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} z^n$

Hier ist der Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{2}$$

Da $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2$.

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$

Der Konvergenzradius ist

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{|(-1)^{n+1}|}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1.$$

iii. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sqrt{(3n-2)2^n} z^n$

Der Konvergenzradius ist

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{3^n \sqrt{(3n-2)2^n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} 3\sqrt{2} \sqrt[2n]{3n-2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3} \sqrt[2n]{n-2/3} = 1 \cdot 1 = 1$.

iv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n} z^n$

Hier berechnet sich der Konvergenzradius folgendermaßen:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{(2+(-1)^n)^n}{n}}} = \frac{1}{\limsup \frac{2+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{3}$$

An dieser Stelle ist es wichtig, dass der Limes superior benutzt wird. Daher wird von den beiden Häufungspunkten von $(2+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, sprich 1 und 3, der größere benutzt.