Repetitorium Analysis 1 für Physiker WS08/09
Montag - Folgen und Reihen
Übungsblatt

Thomas Blasi

1. **Verständnisfragen**

   (a) Sind folgende Aussagen richtig oder falsch:

   i. Jede konvergente Folge hat einen Grenzwert.
   ii. Der Grenzwert einer Folge kann sich ändern, wenn man endlich viele Folgenglieder abändert.
   iii. Jede Nullfolge ist eine konvergente Folge.
   iv. Jede konvergente Folge ist beschränkt.
   v. Seien (a_n), (b_n) zwei Folgen, dann gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n)+\lim_{n\to\infty}(b_n)$.
   vi. Die Summe zweier divergenter Folgen ist divergent.
   vii. Es gibt Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ die nicht konvergieren.
   viii. Teilfolgen von Teilfolgen einer Folge sind Teilfolgen der ursprünglichen Folge.
   ix. Jede Folge hat einen Häufungspunkt.
   x. Jede konvergente Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.
   xi. Der Wert einer Reihe ändert sich nicht, wenn man endlich viele Summanden abändert.
   xii. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist (a_n) eine Cauchyfolge.
   xiii. Wenn (a_n) Cauchyfolge, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
   xiv. Wenn (a_n) Nullfolge, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
   xv. Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

   (b) Geben Sie Beispiele an:

   i. Für eine beschränkte Folge die nicht konvergiert.
   ii. Für eine unbeschränkte Folge mit konvergenter Teilfolge.
   iii. Für eine konvergente Reihe die nicht absolut konvergiert.
   iv. Für eine divergente Reihe $\sum a_n$, wobei (a_n) eine Nullfolge ist.
   v. Für eine Reihe die konvergiert, aber nicht das Quotientenkriterium erfüllt.

2. **Folgen**

   (a) Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz. Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

   i. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{8n+2}{4n+17}$.
   ii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (\sqrt{n^2+n} - n)$.
   iii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt{n^4+12n^2+1} - n^2 + 2$
   iv. $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$.

   (b) Bestimmen Sie die Grenzwerte und Häufungspunkte. Falls die Folge mehr als einen Häufungspunkt hat, geben Sie konvergente Teilfolgen an.

   i. $a_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$ für $k \in \mathbb{Z}$ (*Hinweis:* Verwenden Sie, dass für jede Nullfolge x_n mit $x_n \neq 0$ und $x_n > -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$).
   ii. $a_n = \frac{\cos n}{n}$
   iii. $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$

(c) Man zeige:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

(d) Man berechne:
$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}},$$

d.h. den Limes der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. (*Hinweis:* Um Aussagen über rekursiv definierte Folgen zu treffen benötigt man das Prinzip der vollständigen Induktion.)

(e) Beweisen Sie Satz 6 aus der Vorlesung:
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

3. **Reihen**

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz:

i. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$

ii. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ mit $x \in \mathbb{R}$

iii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n$

iv. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-3}$

v. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^{\frac{5}{2}}}$

vi. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(b) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$

iii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n-2)}$

iv. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{\frac{n}{2}} 2^{1-n}$

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen:

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} z^n$

ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$

iii. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n \sqrt{(3n-2)2^n} z^n$

iv. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n} z^n$