Folgen und Reihen

Thomas Blasi

02.03.2009

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen und Grenzwerte

1.1 Definitionen und Bemerkungen

Definition 1. Unter einer *Folge* reeller Zahlen versteht man eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Jedem $n \in \mathbb{N}$ ist also ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Man schreibt hierfür

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \text{ oder kurz } (a_n).$$

Beispiele:

1. Sei $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erhält die *konstante Folge* $(a, a, a, a, \dots)$.
2. Sei $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Dies ergibt die Folge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$.
3. Für $a_n = (-1)^n$ ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (+1, -1, +1, -1, +1, -1, \dots)$.

Definition 2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeler Zahlen. Die Folge heißt *konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$$\text{Zu jedem } \epsilon > 0 \text{ existiert ein } N \in \mathbb{N}, \text{ so dass } |a_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Bemerkungen:

1. Man beachte, dass die Zahl N von ϵ abhängt. Im Allgemeinen wird man N umso größer wählen müssen, je kleiner ϵ ist.
2. Konvergiert (a_n) gegen a, so nennt man a den *Grenzwert* oder den *Limes* der Folge und schreibt
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oder } a_n \to a \text{ für } n \to \infty.$$
3. Viele Größen können nicht durch einen in endlich vielen Schritte exakt berechenbaren Ausdruck gegeben werden, sondern nur mit beliebiger Genauigkeit approximiert werden. Eine Zahl mit beliebiger Genauigkeit approximieren heißt, sie als Grenzwert einer Folge darstellen.
4. Für $\epsilon > 0$ versteht man unter der *ϵ-Umgebung* von $a \in \mathbb{R}$ die Menge aller Punkte der Zahlengeraden, die von a einen Abstand kleiner als ϵ haben. Die Konvergenz-Bedingung lässt sich nun so formulieren: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein N, so dass
$$a_n \in \,]a - \epsilon, a + \epsilon[\ \text{ für alle } n \geq N.$$
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert somit genau dann gegen a, wenn in jeder noch so kleinen ϵ-Umgebung von a fast alle Glieder der Folge liegen. Dabei bedeutet ¨fast alle¨: alle bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen.
5. Eine Folge die gegen 0 konvergiert, nennt man *Nullfolge*.
6. Eine Folge (a_n), die nicht konvergiert, heißt *divergent*.

Definition 3. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt:

$$\text{Zu jedem } \epsilon > 0 \text{ existiert ein } N \in \mathbb{N}, \text{ so dass } |a_n - a_m| < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Bemerkung:
Es genügt hier nicht, dass die Differenz $|a_n - a_{n+1}|$ zweier aufeinander folgender Folgenglieder beliebig klein wird, sondern die Differenz $|a_n - a_m|$ muss kleiner als ein beliebiges $\epsilon > 0$ sein, wobei n und m unabhängig voneinander alle natürlichen Zahlen durchlaufen, die größer-gleich einer von ϵ abhängigen Schranke sind.

Satz 4. Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist eine Cauchy-Folge.
Beweis. Die Folge (a_n) konvergiere gegen a. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für alle $n, m \geq N$: $|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. □

Vollständigkeitsaxiom. In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy-Folge.

Bemerkung:
Bei der Cauchy-Folge wird kein Bezug auf den Grenzwert genommen.

1.2 Konvergenz und Beschränktheit

Definition 5. Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt*, wenn es eine reelle Konstante $M \geq 0$ gibt, so dass $|a_n| < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 6. Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.
Beweis. Siehe Übung. □

Bemerkungen:

1. Aus Satz 6 folgt unmittelbar, dass jede nicht beschränkte Folge auch nicht konvergiert.
2. Die Umkehrung der Aussage von Satz 6 gilt nicht. Z.B. ist die Folge $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ beschränkt, aber nicht konvergent. Über beschränkte Folgen kann man aber folgende Aussagen treffen.

Definition 7. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots)$ *Teilfolge* der Folge (a_n).

Satz 8.(Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.
Ohne Beweis. □

Definition 9. Eine Zahl a heißt Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert.

Beispiel:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (+1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots)$ mit $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt. Sie besitzt die konvergenten Teilfolgen $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{2n+1} = -1$ und $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{2n+1} = 1$. Somit sind -1 und 1 die beiden Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung :
Mit Definition 9 kann der Satz von Bolzano-Weierstraß folgendermaßen formuliert werden: Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Definition 10. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt

1. *monoton wachsend*, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
2. *streng monoton wachsend*, falls $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
3. *monoton fallend*, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
4. *streng monoton fallend*, falls $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 11. Jede beschränkte monotone Folge (a_n) reeller Zahlen konvergiert.
Ohne Beweis. □

1.3 Rechenregeln konvergenter Folgen

Satz 12. Seien (a_n), (b_n), (c_n), $n \in \mathbb{N}$, konvergente Folgen, mit $\lim_{n\to\infty} c_n =: c \neq 0$. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\text{Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig} \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} c_n} \tag{5}$$

Ohne Beweis. □

Satz 13.(Einschließungskriterium) Seien (a_n), (b_n) und (c_n) konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle n. Weiter gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = R = \lim_{n\to\infty} c_n$ für ein $R \in \mathbb{R}$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} b_n = R$.
Ohne Beweis. □

2 Reihen

2.1 Reihen - Folgen von Partialsummen

Definition 14. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Unter der m-ten *Partialasumme* der Folge (a_n) versteht man

$$s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Bemerkungen:

1. Die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen heißt (unendliche) *Reihe* mit den Gliedern a_n und wird mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

2. Alle bisherigen Sätze über Folgen gelten auch für Reihen (Reihen sind Folgen von Partialsummen!).

3. Konvergiert die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen, so wird der Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet und heißt dann *Summe* oder *Wert* der Reihe.

4. **Vorsicht!** Hier besteht Verwechslungsgefahr. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet zwei Dinge. Einerseits die Folge $\left(\sum\limits_{n=0}^{m} a_n\right)_{m\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen, andererseits im Falle der Konvergenz den Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{m} a_n$.

5. Auch jede Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lässt sich als Reihe darstellen, denn es gilt

$$c_n = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k - c_{k-1}) \text{ für allen} \in \mathbb{N}.$$

   Dies nennt man *Teleskopsumme.*

Beispiele:

1. Die *geometrische Reihe*. Für $|x| < 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

   Mittels vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass sich die Partialsumme s_m darstellen lässt als $\sum\limits_{k=0}^{n} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Die Grenzwertbildung $n \to \infty$ liefert obige Formel.

2. Die *harmonische Reihe*. Diese divergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty.$$

   Zum Beweis, siehe Übung.

2.2 Konvergenz-Kriterien für Reihen

Satz 15.(Cauchy'sches Konvergenz-Kriterium) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\text{Zu jedem } \epsilon > 0 \text{ existiert ein } N \in \mathbb{N}, \text{ so dass } |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \epsilon \text{ für alle } n \geq m \geq N.$$

Beweis. Sei $S_N := \sum_{k=0}^{N} a_k$ die N-te Partialsumme. So ist $S_n - S_{m-1} = \sum_{k=m}^{n} a_k$. Die angegebene Bedingung ist somit gleichbedeutend mit der Aussage, dass die Folge (S_n) der Partialsummen eine Cauchy-Folge ist. Diese konvergiert nach dem Vollständigkeitsaxiom.

Satz 16. Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Beweis. Benutze Satz 15. Für $n = m$ gilt dann: $|a_n| < \epsilon$. Daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung:
Satz 16 liefert ein starkes Divergenzkriterium. Ist a_n keine Nullfolge, so divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Satz 17. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe (d.h. die Folge der Partialsummen) beschränkt ist.
Beweis. Da $a_n \geq 0$ ist die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$ monoton wachsend. Die Behauptung folgt deshalb aus dem Satz über die Konvergenz monotoner beschränkter Folgen (Satz 11). □

Satz 18.(Leibniz'sches Konvergenz-Kriterium) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Ohne Beweis. □

Beispiele:

1. Die *alternierende harmonische* Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

2. Die *Leibniz'sche* Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Definition 19. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absoult konvergent*, falls die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bemerkung:
Eine absolut konvergente Folge konvergiert auch im gewöhnlichen Sinn. Dies folgt aus dem Cauchy'schen Konvergenz-Kriterium und der Dreiecksungleichung. Die Umkehrung gilt nicht, wie an der alternierenden harmonischen Reihe gesehen werden kann. Somit ist die absolute Konvergenz eine schärfere Bedingung als die gewöhnliche Konvergenz.

Satz 20. (Integral-Vergleichskriterium)
Dies ist ein Vorgriff auf die noch folgende Integration.
Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende Funktion. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \Longleftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ konvergiert.}$$

Ohne Beweis. □

Beispiel:
Da das Integral $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ für $s > 1$ konvergiert, konvergiert also die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $s > 1$ und divergiert für $s \leq 1$.

Satz 21.(Majoranten-Kriterium) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit lauter nich-negativen Gliedern und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
Ohne Beweis. □

Bemerkungen

1. Man nennt $\sum c_n$ eine *Majorante* von $\sum a_n$.
2. Satz 21 impliziert folgendes Divergenzkriterium:
   Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine divergente Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \geq c_n$ für alle n. Dann divergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Satz 22.(Quotienten-Kriterium) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Es gebe eine reelle Zahl θ mit $0 < \theta < 1$, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolut.

Beispiel:
Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergiert nach Satz 21, da mit $a_n := \frac{n^2}{2^n}$ für alle $n \geq 3$ gilt :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^2 \leq \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{8}{9} =: \theta < 1.$$

Bemerkung:
Man beachte, dass die Bedingung im Qutientenkriterium ein von n unabhängiges $\theta < 1$ fordert. Die Qutienten $\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|$ dürfen also nicht beliebig nahe an 1 herankommen.

Satz 23.(Wurzelkriterium) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit. Weiter gebe es eine reelle Zahl θ mit $0 < \theta < 1$, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

So konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolut.

Satz 24.(Umordnungssatz) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert auch jede Umordnung dieser Reihe absolut gegen denselben Grenzwert.
Ohne Beweis. □

2.3 Potenzreihen

Bemerkung: Alle Sätze über Reihen und Folgen reeller Zahlen können auch für Reihen und Folgen komplexer Zahlen übernommen werden. Wichtig ist hier noch die folgende Aussage:

Satz 25. Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Die Folge konvergiert genau dann, wenn die beiden reellen Folgen $(\Re(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\Im(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Im Falle der Konvergenz gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \Re(c_n) + i \lim_{n\to\infty} \Im(c_n).$$

Definition 26. Sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen und $z \in A \subset \mathbb{C}$. Eine Reihe der Form

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

nennt man *Potenzreihe.*

Beispiele:

1. Die oben erwähnte geometrische Reihe.
2. Die *Exponentialreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \dots$

Bemerkung:
Zu den grundlegenden Eigenschaften einer Potenzreihe gehört die Existenz eines Konvergenzkreises. Der Radius R dieses Kreises, der auch 0 oder ∞ sein kann, ist dadurch ausgezeichnet, dass $P(z)$ für $|z| < R$ konvergiert und für $|z| > R$ divergiert. Die Existenz eines Konvergenzkreises wird im folgenden Satz gezeigt.

Satz 27. Konvergiert die Potenzreihe P in einem Punkt $z_0 \neq 0$, so konvergiert sie absolut in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$.
Ohne Beweis. □

Bemerkung: Formeln zur Berechnung des Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \text{ (Cauchy-Hadamard),}$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|}, \text{ falls der Grenzwert existiert (Euler).}$$

Dabei bedeutet $\limsup a_n := \lim_{n\to\infty}(\sup\{a_k : k \geq n\})$.

Satz 28.(Cauchy-Produkt) Konvergieren $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ im Punkt z absolut, so gilt

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

Literatur

[1] Forster, Otto, Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen, 8., verbesserte Auflage, Vieweg Verlag Wiesbaden 2006

[2] Königsberger, Konrad, Analysis 1, 6., durchgesehene Auflage, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 2004