Technische Universität München

Thomas Reifenberger
Musterlösung Freitag

Ferienkurs Lineare Algebra für Physiker
WS 2008/09

Aufgabe 1 *Lösung*

im $\mathbb{R}^{n\times n}$:
■□■■
□□□□
■■□■
im $\mathbb{C}^{n\times n}$:
■■□■
□□□□
□□■■
□□□■

Aufgabe 2 *Lösung*

Die Berechnung erfolgt nach Schema, deshalb werden hier nur die wichtigsten Ergebnisse angegeben:

(i) Berechne charakteristisches Polynom:

$$\chi_A = \det(\underline{A} - \lambda \underline{E}_3) = (\lambda - 7i)^2(\lambda - 7)$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = 7i\ , \quad \lambda_2 = 7 \quad \text{mit } \alpha_A(7i) = 2\ , \quad \alpha_A(7) = 1$$

(ii) Berechne Eigenräume:

$$\mathrm{Eig}_A(7i) = \ker(\underline{A} - 7i\underline{E}_3) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}-i\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{Eig}_A(7) = \ker(\underline{A} - 7\underline{E}_3) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \ v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i\\1\\0\end{pmatrix} \ , \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \ , \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma_A(7i) = 2\ , \quad \gamma_A(7) = 1 \ \Rightarrow \ A \text{ diagonalisierbar}$$

Ferner gilt: $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$, also ist v_1, v_2, v_3 eine ONB.

$$\Rightarrow \underline{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i & 0 & i\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix} \in \mathrm{U}(3) \Rightarrow \underline{T}^{-1} = \underline{T}^{*} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\\ -i & 1 & 0\end{pmatrix} \ , \quad \underline{D} = \mathrm{diag}(7i, 7i, 7)$$

Aufgabe 3 *Potenzieren von Matrizen – Lösung*

a)

$$\underline{A} = \underline{T}^{-1}\ \underline{D}\ \underline{T}$$

$$\Rightarrow \underline{A}^k = \underline{T}\ \underline{D}\ \underbrace{\underline{T}^{-1}\ \underline{T}}_{\underline{E}_n}\ \underline{D}\ \underbrace{\underline{T}^{-1}\ \underline{T}}_{\underline{E}_n}\ \underline{D} \ldots \underline{D}\ \underline{T}^{-1} = \underline{T}\ \underline{D}^k\ \underline{T}^{-1}$$

b) Es seien

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{A}\ \underline{B} = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n b_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Beweis der Behauptung duch Induktion:

Es sei nun $\underline{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

IV $\underline{D}^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$

IA $k = 1$ – klar.

IS $k \to k+1$

$$\underline{D}^{k+1} = \underline{D}\ \underline{D}^k \overset{\text{IV}}{=} \underline{D} \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) \overset{(*)}{=} \operatorname{diag}(\lambda_1^{k+1}, \ldots, \lambda_n^{k+1})$$

$\square$

c) Diagonalisiere $\underline{A}$:

$$\chi_A = \det(\underline{A} - \lambda \underline{E}_3) = (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)$$

Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1\ , \quad \lambda_2 = 2\ , \quad \lambda_3 = -1$$

Die Eigenwerte sind paarweise verschieden (d.h. alle einfach), also gibt es drei linear unabhängige Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\underline{A}$ diagonalisierbar.

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Durch Invertieren (hier notwendig, $T \notin \mathrm{U}(3)!$) ergibt sich:

$$\underline{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

mit $\underline{A} = \underline{T}\ \underline{D}\ \underline{T}^{-1}$, wobei $\underline{D} = \operatorname{diag}(1, 2, -1)$. Unter Verwendung der Ergebnisse der Teilaufgaben a) und b) ergibt sich:

$$\underline{A}^{10} = \underline{T}\ \underline{D}^{10}\ \underline{T}^{-1} = \underline{T} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1024 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \underline{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1024 & -1023 & \frac{1023}{2} \\ 341 & -340 & \frac{341}{2} \\ 682 & -682 & 342 \end{pmatrix}$$

d)

$$\underline{A} \text{ normal } \Rightarrow \exists \underline{T} \in \mathrm{U}(n) : \underline{A} = \underline{T}\ \underline{D}\ \underline{T}^* \text{ mit } \underline{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Definiere nun $\underline{C} := \operatorname{diag}(\sqrt[3]{\lambda_1}, \ldots, \sqrt[3]{\lambda_n})$. Dann ist $\underline{B} := \underline{T}\ \underline{C}\ \underline{T}^*$ normal (nach Satz über Diagonalisierung normaler Matrizen) und es gilt $\underline{B}^3 = \underline{A}$.

Aufgabe 4 *Lösung*

Dies ist eine Umkehrung des Satzes zur Diagonalisierung.

$$\underline{D} := \operatorname{diag}(-2, 7, 3)$$

$$\underline{T} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Invertieren liefert

$$\underline{T}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dann hat die Matrix

$$\underline{A} := \underline{T}\ \underline{D}\ \underline{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} & -3 \\ \frac{16}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{10}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

die geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 5 *Alte Klausuraufgabe – Lösung*

a) $\underline{B} = \underline{T}^{-1}\ \underline{A}\ \underline{T}$

$$\Rightarrow \underline{B}^2 = \underline{T}^{-1}\ \underline{A}\ \underbrace{\underline{T}\ \underline{T}^{-1}}_{\underline{E}_n}\ \underline{A}\ \underline{T} = \underline{T}^{-1}\ \underline{A}^2\ \underline{T} = -\underline{T}^{-1}\ \underline{A}\ \underline{T} = -\underline{B}$$

b) Sei $\underline{v} \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \underline{A}^2\ \underline{v} &= \underline{A}\ \underline{A}\ \underline{v} = \underline{A}\lambda\underline{v} = \lambda^2\underline{v} \\ \| \quad & \\ -\underline{A}\ \underline{v} &= -\lambda v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\lambda \Rightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 0$$

Aufgabe 6 *Ältere Klausuraufgabe – Lösung*

a)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -25$$

b) Eigenwerte von $\underline{A}$:

$$\chi_A(\lambda) = (41-\lambda)(34-\lambda) - 144 = \lambda^2 - 75\lambda + 1250 = (\lambda - 50)(\lambda - 25)$$

$$\lambda_1 = 25, \quad \lambda_2 = 50$$

Berechne v_1:

$$\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Analoge Berechnung von v_2, oder man verwendet $v_1 \perp v_2$, da A symmetrisch:

$$v_2 = v_1^{\perp} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q(x) = P(Ux) = \langle Ux, AUx \rangle - 25 = \langle x, \underbrace{U^{-1}AU}_{\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}}\ x \rangle - 25 = 25x_1^2 + 50x_2^2 - 25$$

Aufgabe 7 *Hauptachsentransformation des Trägheitstensors – Lösung*

a)

$$\underline{\Theta}_{ij} = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\ \varrho(\vec{x})(\vec{x}^2\delta_{ij} - x_i x_j) = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\ \varrho(\vec{x})(\vec{x}^2\delta_{ji} - x_j x_i) = \underline{\Theta}_{ji}$$

$\Rightarrow \underline{\Theta}$ symmetrisch und reell
$\Rightarrow \underline{\Theta}$ normal
$\Rightarrow \underline{\Theta}$ diagonalisierbar

b) Berechne Eigenwerte von

$$\underline{\Theta} = \begin{pmatrix} \mu_+ & \mu_- & 0 \\ \mu_- & \mu_+ & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \mu_+ \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \mu_+ - \lambda & \mu_- & 0 \\ \mu_- & \mu_+ - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \mu_+ - \lambda \end{pmatrix} = (2\mu_+ - \lambda)\left[(\mu_+ - \lambda)^2 - \mu_-^2\right]$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2\mu_+ = 4a^2(m+M), \quad \lambda_2 = \mu_+ + \mu_- = 4a^2 m\ , \quad \lambda_3 = \mu_+ - \mu_- = 4a^2 M$

$\Rightarrow \underline{\Theta}$ in Diagonalform

$$\underline{\theta}' = \begin{pmatrix} 4a^2(m+M) & & \\ & 4a^2 m & \\ & & 4a^2 M \end{pmatrix}$$

c) Die Hauptträgheitsachsen entsprechen den Eigenvektoren. Sie liegen auf den Symmetrieachsen der Massenanordnung. In diesem Fall sind die erste und zweite Achse die Diagonalen des Quadrates in der x-y-Ebene. Da $\underline{\Theta}$ normal ist, sind die Eigenvektoren paarweise orthogonal. Die dritte Achse steht senkrecht auf den anderen beiden und ist daher identisch mit der z-Achse. Dabei entspricht die z-Achse dem Eigenvektor zum Eigenwert $4a^2(M+m)$.

Aufgabe 8 *Fibonacci-Zahlen – Lösung*

a) Die Rekursionsformel lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$$

b) Setzt man diese Formel rekursiv in sich selbst ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das n-te Folgeglied kann also durch das Potenzieren der Matrix $\underline{\mathbf{A}}$ bestimmt werden. Wie in Aufgabe 3 gezeigt wurde, lässt sich dieses durch die Diagonalisierung von $\underline{\mathbf{A}}$ berechnen.
Hierzu wird zuerst das charakteristische Polynom von $\underline{\mathbf{A}}$ berechnet. Es ergibt sich:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Dieses hat die Nullstellen $\lambda_1 = \Phi$ und $\lambda_2 = 1 - \Phi$. Dabei ist $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887\ldots$ das Streckenverhältnis vom *Goldenen Schnitt*.
Zu diesen Eigenwerten werden nun die Eigenvektoren bestimmt. Hierbei ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - \Phi \end{pmatrix} \\ v_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ \Phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir nun eine Diagonalisierung von $\underline{\mathbf{A}}$:

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{T}}\ \underline{\mathbf{D}}\ \underline{\mathbf{T}}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1-\Phi & \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 1-\Phi \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1-2\Phi} \begin{pmatrix} \Phi & 1 \\ -(1-\Phi) & -1 \end{pmatrix}$$

Nach Aufgabe 3 folgt nun:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} &= \underline{\mathbf{T}}\ \underline{\mathbf{D}}^{n-1}\ \underline{\mathbf{T}}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1-\Phi & \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi^{n-1} & 0 \\ 0 & (1-\Phi)^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1-2\Phi} \begin{pmatrix} \Phi & 1 \\ -(1-\Phi) & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-2\Phi} \begin{pmatrix} (1-\Phi)^n - \Phi^n \\ \Phi^n - \Phi^{n+1} + \Phi(1-\Phi)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun:

$$F_n = \frac{1}{2\Phi - 1}\left[\Phi^n - (1-\Phi)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$