Christoph Niehoff

Aufgabe 1.

Welche Eigenschaften haben die folgenden Matrizen?

im $\mathbb{R}^{n\times n}$	orthogonal	speziell orthogonal	symmetrisch	normal
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐
$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 4 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -17 \\ -4 & -17 & 9 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐
$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐

im $\mathbb{C}^{n\times n}$	unitär	speziell unitär	hermitesch	normal
$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐
$\begin{pmatrix} 3 & 2+i & 1 \\ 2-i & 4 & -7i \\ 1 & 7i & i \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐
$\begin{pmatrix} 3 & 2+i & 1 \\ 2-i & 4 & -7i \\ 1 & 7i & 0 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐
$\begin{pmatrix} 5+4i & 0 & -4+i \\ 0 & -6 & 0 \\ 4-i & 0 & 5+4i \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 2.

Diagonalisieren Sie folgende Matrix:

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7+7i & 7+7i & 0 \\ -7-7i & 7+7i & 0 \\ 0 & 0 & 14i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. *Potenzieren von Matrizen*

Sei $\underline{\mathbf{A}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix. Dann ist die k-te Potenz von $\underline{\mathbf{A}}$ definiert durch:

$$\underline{\mathbf{A}}^k = \underbrace{\underline{\mathbf{A}}\,\underline{\mathbf{A}}\ldots\underline{\mathbf{A}}}_{k-\text{mal}}.$$

Zeigen Sie:

a) Ist $\underline{\mathbf{A}}$ diagonalisierbar mit Diagonalmatrix $\underline{\mathbf{D}}$ und Transformationsmatrix $\underline{\mathbf{T}}$, so gilt:

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{T}}\,\underline{\mathbf{D}}\,\underline{\mathbf{T}}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{A}}^k = \underline{\mathbf{T}}\,\underline{\mathbf{D}}^k\,\underline{\mathbf{T}}^{-1}$$

b) Ist $\underline{\mathbf{D}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix, so gilt:

$$\underline{\mathbf{D}}^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$$

c) Berechnen Sie $\underline{\mathbf{A}}^{10}$ für

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Für jede normale Matrix $\underline{\mathbf{A}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt es eine normale Matrix $\underline{\mathbf{B}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\underline{\mathbf{B}}^3 = \underline{\mathbf{A}}$.

Aufgabe 4.

Geben Sie eine reelle 3×3-Matrix an mit Eigenwerte -2, 7, 3 und Eigenvektoren $(1,0,2)^T$, $(1,2,0)^T$, $(0,2,1)^T$.

Aufgabe 5. *Alte Klausuraufgabe*

Es sei $\underline{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit $\underline{\mathbf{A}}^2 = -\underline{\mathbf{A}}$.
Zeigen Sie:

a) Für jede zu $\underline{\mathbf{A}}$ ähnliche Matrix $\underline{\mathbf{B}} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt ebenfalls: $\underline{\mathbf{B}}^2 = -\underline{\mathbf{B}}$.

b) $\underline{\mathbf{A}}$ hat nur Eigenwerte $\lambda \in \{-1, 0\}$

Aufgabe 6. *Ältere Klausuraufgabe*

Es sei das Polynom

$$P(x_1, x_2) = 41x_1^2 - 24x_1x_2 + 34x_2^2 - 25$$

gegeben.

a) Schreiben Sie P in der Form $P(x) = \langle x, Ax\rangle + \langle x, a\rangle + \alpha$, mit einer symmetrischen Matrix A, einem Vektor $a \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie zu A eine orthogonale Matrix U, so daß $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie das Polynom $Q(x) = P(Ux)$ explizit an.

Bemerkung.
Polynome der obigen Form definieren Quadriken (in diesem Fall eine Ellipse) im $\mathbb{R}^2$. Die Spalten von U entsprechen dabei den Hauptachsen. Durch die Diagonalisierung von A kann man also die Drehung und die Hauptachsenlängen der Ellipse bestimmen.

Aufgabe 7. *Hauptachsentransformation des Trägheitstensors*

Die Rotationsenergie eines starren Körpers mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ ist im Allgemeinen definiert durch

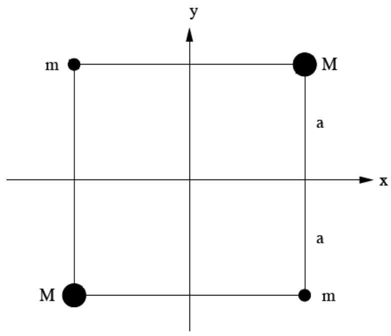
$$T_{rot} = \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}, \underline{\mathbf{\Theta}}\, \vec{\omega} \rangle \,.$$

Dabei ist $\underline{\mathbf{\Theta}}$ der *Trägheitstensor*. Dieser lässt sich als Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ darstellen und ist komponentenweise folgendermaßen definiert:

$$\Theta_{ij} = \int \varrho(\vec{x})(\vec{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j)\ d^3\vec{x}$$

Hierbei ist $\varrho(\vec{r})$ die *Massendichte* des Körpers und δ_{ij} das *Kronecker-Symbol* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für}\, i = j \\ 0 & \text{für}\, i \neq j \end{cases}$

a) Begründen Sie, dass der Trägheitstensor diagonalisierbar ist.



b) Die nebenstehende Massenanordnung hat folgenden Trägheitstensor:

$$\underline{\mathbf{\Theta}} = \begin{pmatrix} \mu_+ & \mu_- & 0 \\ \mu_- & \mu_+ & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_+ \end{pmatrix}$$

mit $\mu_+ = 2a^2(m + M)$ und $\mu_- = 2a^2(m - M)$.
Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente. Diese entsprechen den Komponenten des auf Diagonalform gebrachten Trägheitstensors.

c) Wo liegen die Hauptträgheitsachsen der Massenanordnung? Diese entsprechen den Koordinatenachsen im Koordinatensystem, in dem der Tragheitstensor Diagonalgestalt annimmt.

Aufgabe 8.* *Fibonacci-Zahlen*

Die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Fibonacci-Zahlen $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$ ist durch die Rekursionsformel $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ und die Anfangswerte $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ definiert.
Die Rekursionsformel lässt sich auch als Matrix-Multiplikation der folgenden Form schreiben:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Matrix $\underline{\mathbf{A}}$.

b) Wie lässt sich das n-te Folgeglied F_n im Matrizenkalkül darstellen? Was hat das mit Diagonalisierung zu tun? Leiten Sie die *Formel von Moivre-Binet* her.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Hinweis: Betrachten Sie Aufgabe 3.