Larissa Hammerstein
Musterlösung Donnerstag

Aufgabe 1 *Determinante und Invertierbarkeit*

Gegeben ist ein Körper $\mathbb{K}$, ein $n \in \mathbb{N}^+$ und eine Matrix $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
Gesucht ist eine Matrix $M^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, die die Gleichung

$$M \cdot M^{-1} = E_n$$

erfüllt. Wir lösen obige Matrixgleichung jeweils durch elementare Zeilenumformungen an der erweiterten Matrix $(M|E_n)$ bis wir $(E_n|M^{-1})$ erhalten.
Mit Hilfe der Determinanten von quadratischen Matrizen können wir ein Kriterium der Invertierbarkeit angeben:

$$A \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ ist invertierbar } \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

a) Es ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}, n = 2$ und

$$(A|E_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ i & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{iI-II}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & -2 & i & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}II]{I+\frac{i}{2}II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$= (E_2|A^{-1}) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Mit dem Determinanten-Kriterium gilt:

$$\det(A) = 1 \cdot 1 - i \cdot i = 1 - i^2 = 1 - (-1) = 2 \neq 0 \Rightarrow \; A \text{ ist invertierbar.}$$

Für die Inverse einer invertierbaren (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Jetzt ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$ und

$$(B|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[4I-2III]{3I-2II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2II-III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \; B \text{ ist nicht invertierbar!}$$

Mit dem Determinanten-Kriterium gilt (Entwicklung nach Sarrus):

$$\det(B) = 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 5 - 4 \cdot 4 \cdot 4 - 5 \cdot 5 \cdot 2 - 6 \cdot 3 \cdot 3 = 0 \Rightarrow \; B \text{ ist nicht invertierbar!}$$

Schneller erhält man das mit Determinantenumformungen:
Subtraktion der 1.Zeile von der 2.Zeile und der 2.Zeile von der 3.Zeile liefert:
$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$, da die letzten beiden Zeilen linear abhängig sind.

c) Es ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 4$ und

$$(C|E_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ccc} (1) & \to & (4) \\ (2) & \to & (1) \\ (3) & \to & (2) \\ (4) & \to & (3) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2I-IV} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{7II-IV} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & 7 & 1 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{26III-IV} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 45 & -1 & 2 & -7 & 26 \end{array}\right) \begin{array}{c} II - \frac{1}{45}IV \\ III - \frac{2}{45}IV \\ \frac{1}{45}IV \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & \frac{1}{45} & -\frac{2}{45} & \frac{52}{45} & -\frac{26}{45} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{45} & -\frac{4}{45} & \frac{14}{45} & -\frac{7}{45} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{45} & \frac{2}{45} & -\frac{7}{45} & \frac{26}{45} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[I-III]{II-4III} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & -\frac{2}{45} & \frac{49}{45} & -\frac{14}{45} & \frac{7}{45} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{45} & \frac{14}{45} & -\frac{4}{45} & \frac{2}{455} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{45} & -\frac{4}{45} & \frac{14}{45} & -\frac{7}{45} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{45} & \frac{2}{45} & -\frac{7}{45} & \frac{26}{45} \end{array}\right) \xrightarrow{I-4II}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{26}{45} & -\frac{7}{45} & \frac{2}{45} & -\frac{1}{45} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{45} & \frac{14}{45} & -\frac{4}{45} & \frac{2}{45} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{45} & -\frac{4}{45} & \frac{14}{45} & -\frac{7}{45} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{45} & \frac{2}{45} & -\frac{7}{45} & \frac{26}{45} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 26 & -7 & 2 & -1 \\ -7 & 14 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 14 & -7 \\ -1 & 2 & -7 & 26 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 *Determinante und charakteristisches Polynom-Lösung*

Eine (quadratische) Matrix ist genau dann invertierbar wenn ihre Determinante ungleich 0 ist. Wir berechnen also ersteinmal die Determinante der Matrix

$$M_\lambda := \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

z.B. durch Entwicklung nach der ersten Spalte: Es ist dann

$$\det(M_\lambda) = (-1)^{1+1} \cdot (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \cdot [(1-\lambda)\cdot(5-\lambda) - (-1)\cdot 1] - 2 \cdot [2\cdot(5-\lambda) - (-1)\cdot(-1)]$$

$$+2 \cdot [2 \cdot 1 - (1-\lambda)\cdot(-1)]$$

$$= \ldots = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 16\lambda = -\lambda \cdot (\lambda^2 - 8\lambda + 16)$$

$$= -\lambda \cdot (\lambda - 4)^2$$

Wir erkennen daraus, dass

$$\det M_\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 4\}$$

M_λ ist also genau für alle $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0,4\}$ invertierbar.
Zusammenhang mit dem Charakteristischen Polynom:

$$\det(M_\lambda) = \det(M_0 - \lambda E_3) = \chi_{M_0}(\lambda)$$

Aufgabe 3 *Eigenwerte und Eigenvektoren-Lösung*

Das charakteristische Polynom von A ist:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - (-1)(3-\lambda)(-1) = -\lambda(2-\lambda)(3-\lambda)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ sind die Eigenwerte von A.

Beachte: Mögliche Linearfaktoren ausklammern! Die ausmultiplizierte Form $-\lambda^3+5\lambda^2-6\lambda$ ist zur Bestimmung der Eigenwerte nicht sinnvoll.
Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren durch das LGS: $(A - \lambda_i E_3)v_i = 0$:

$$\lambda_1 = 0: \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_2 = 2: \left(\begin{array}{ccc|c} 1-2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3-2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1-3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_2 = \mu_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_3 = 3: \left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 2 & -10 & \\ 0 & 3-3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1-3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_3 = \mu_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A besitzt somit 3 verschiedene Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenvektoren sind linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Das charakteristische Polynom der Matrix B ist:

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -5 & 7 \\ -4 & 3-\lambda & -5 \\ -7 & 4 & -8-\lambda \end{vmatrix}$$

$= (5-\lambda)(3-\lambda)(-8-\lambda) + (-5)(-5)(-7) + 7(-4)4 - (-7)(3-\lambda)7 - 4(-5)(5-\lambda) - (-8-\lambda)(-4)(-5)$
$= \ldots = \lambda^3$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ist dreifacher Eigenwert von B.

Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren durch das LGS: $(B - \lambda E_3)v = 0$ mit $\lambda = 0$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -5 & 7 & 0 \\ -4 & 3 & -5 & 0 \\ -7 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -5 & 0 \\ -7 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v = \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

Bis auf skalare Vielfache ist $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ der einzige Eigenvektor von B. Kern(B) ist somit eindimensional.

Beachte: $\det(A) = 0 \Leftrightarrow 0$ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \dim(Kern(A)) \leq 0 \Leftrightarrow A$ ist nicht invertierbar.

Aufgabe 4 *Eigenwerte Teil 2-Lösung*

- Eigenwerte von A als Nullstellen von

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2\lambda & -(1+i) & 0 & 1-i \\ -(1+i) & -2\lambda & 1-i & 0 \\ 0 & 1-i & -2\lambda & -(1+i) \\ 1-i & 0 & -(1+i) & -2\lambda \end{vmatrix}$$

$= \frac{1}{16} \left\{-2\lambda \left[-8\lambda^3 + 2\lambda(1-i)^2 + 2\lambda(1+i)^2\right] + (1+i) \left[-4\lambda^2(1+i) - (1+i)(1-i)^2 + (1+i)^3\right] - (1-i) \left[(1+i)^2(1-\right.\right.$
$= \frac{1}{16} \left\{16\lambda^4 + (1+i)^2[-8\lambda^2 + 4i] - (1-i)^2[4i + 8\lambda^2]\right\} = \frac{1}{16}\{16\lambda^4 - 16\} \Rightarrow$

$$\lambda^4 - 1 \stackrel{!}{=} \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$$

$\Rightarrow$ Es gibt eine Basis aus Eigenvektoren v_i zu Eigenwerten λ_i von A $1 \leq i \leq 4$.
Bemerkung: Berechnung der Eigenvektoren nicht explizit nötig!
Es gilt: Ist v_i EV zum EW λ_i von $A \Rightarrow A^k v_i = \lambda_i^k v_i \; \forall k \in \mathbb{N} (1 \leq i \leq 4)$, d.h. v_i ist EV zum EW λ_i^k von A_k.

- $\Rightarrow$ Die Eigenwerte von A^2 sind $\lambda_1^2 = 1, \lambda_2^2 = 1, \lambda_3^2 = -1, \lambda_4^2 = -1$
  Bemerkung: $\{v_1, v_2\}$ ist Basis des Eigenraums zum doppelten EW $\lambda_{1,2}^2 = 1$ von A^2
  $\{v_3, v4\}$ ist Basis des Eigenraums zum doppelten EW $\lambda_{3,4}^2 = -1$ von A^2
  d.h. geometrische Vielfachheit = algebraische Vielfachheit!
- $\Rightarrow$ Die Eigenwerte von A^3 sind $\lambda_1^3 = 1, \lambda_2^3 = -1, \lambda_3^3 = -i, \lambda_4^3 = +i$
  Bemerkung: v_i ist EV zum einfachen EW λ_i^3 von A^3 $(1 \leq i \leq 4)$
- $\Rightarrow$ Die Eigenwerte von A^4 sind $\lambda_1^4, \lambda_2^4, \lambda_3^4, \lambda_4^4 = 1$
  Bemerkung: $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ist Basis des Eigenraums zum vierfachen EW $\lambda = 1$ von A^4
  $\Rightarrow$ Jeden Vektor des $\mathbb{R}^4$ ist EV zum EW $\lambda = 1 \Rightarrow A^4 = E$

Aufgabe 5 *ein Beweis-Lösung*

a) $r \cdot A$ mit $r \neq 0$: $(rA) \cdot v = r \cdot (Av) = r \cdot \lambda v = (r\lambda) \cdot v \Rightarrow v$ ist EV von $r \cdot A$ zum EW $r \cdot \lambda$
Umgekehrt ist jeden EV von $r \cdot A$ zum Eigenvektor μ ein EV von A zum EW $\frac{\mu}{r}$ (falls $r \neq 0$)

b) $A^k, k \in \mathbb{N}$: Beh: $A^k v = \lambda^k v \; \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow v$ ist EV von A^k zum EW λ^k
Beweis durch Induktion über k: $k = 1$ klar, Induktionsvoraussetzung: $A^k v = \lambda^k v$, Induktionsschritt: $A^{k+1} v = A(A^k v) = A(\lambda^v) = \lambda^k (Av) = \lambda^k (\lambda v) = \lambda^{k+1} v$ $\square$

c) Beachte A invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ EW $\lambda \neq 0$ und es gilt: $v = A^{-1}Av = A^{-1}(Av) = A^{-1}(\lambda v) \overset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} A^{-1} v = \frac{1}{\lambda} v \Rightarrow v$ ist EV von A^{-1} zum EW $\frac{1}{\lambda}$ und umgekehrt.

d) $\det(B^{-1}AB - \lambda E) = \det(B^{-1}AB - \lambda B^{-1}EB) = \det(B^{-1}(A - \lambda E)B) = \det(B^{-1}) \det(A - \lambda E) \det(B) \overset{b)}{=} \det(A - \lambda E) \Rightarrow$ EW von A und $B^{-1}AB$ (d.h. ähnlicher Matrizen) sind gleich, und es gilt für $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v \Leftrightarrow A(BB^{-1})v = \lambda v \Leftrightarrow B^{-1}(A(BB^{-1})v) = B^{-1}(\lambda v) \Leftrightarrow (B^{-1}AB)(B^{-1}v) = \lambda(B^{-1}v) \Rightarrow B^{-1}v$ ist EV von $B^{-1}AB$ zum EW λ

e) $\det(A^T - \lambda E) = \det(A^T - \lambda E^T) = \det(A - \lambda E)^T = \det(A - \lambda E) \Rightarrow$ EW von A und A^T sind gleich, aber EV von A sind i.A. nur linksseitige EV von A^T, da $Av = \lambda v \Leftrightarrow v^T A^T = \lambda v$

Aufgabe 6 *eine alte Klausuraufgabe-Lösung*

a) $\text{Kern}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 | Ax = 0\} \Rightarrow$ homogenes LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} x_3 = \lambda \in \mathbb{R} \\ x_2 = \frac{\lambda}{3} \\ x_1 = -\frac{\lambda}{2} \end{array}$$

Mit $\lambda = 6\mu \Rightarrow \text{Kern}(f) = \left\{ x = \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$, $\dim(\text{Kern}(f)) = 1$, Basis $B_{Kern(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

$\text{Rang}(A) = \dim(\text{Bild}(f)) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\text{Kern}(f)) = 3 - 1 = 2$, Basis $B_{Bild(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

b) $Av = \begin{pmatrix} -28 \\ 84 \\ -42 \end{pmatrix} = -14 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow -14$ ist EW von A.

c) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = (4 - \lambda)(-9 - \lambda)(-2 - \lambda) - 36(4 - \lambda) - 36(-2 - \lambda) = \ldots = -\lambda(\lambda^2 + 7\lambda - 98)$
Eigenwerte von A sind Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -14 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{-98}{-14} = 7$$

Aufgabe 7 *noch eine alte Klausuraufgabe-Lösung*

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 3(-9-16) = -75 \neq 0$ bzw Rg $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ =Rg $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3-\frac{16}{3} \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ Beh.

b) $Av_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 \Rightarrow \lambda_1 = 5$

c) $(A-(-5)E)v_2 = 0: \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_2 = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$

d) <u>1.Weg</u>: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \det(A) = -75 \Rightarrow \lambda_3 = 3$
<u>2.Weg</u>: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 =$spur$(A) = 3 \Rightarrow \lambda_3 = 3$
<u>3.Weg</u>: $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_3 = 3$

e) Basis aus Eigenvektoren: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$