ANDREA WINNERL FERIENKURS LINEARE ALGEBRA FÜR PHYSIKER
AUFGABEN DONNERSTAG WS 2008/09

Aufgabe 1 *Determinante und Invertierbarkeit*

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen und geben Sie an, ob die Matrizen invertierbar sind.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 *Determinante und charakteristisches Polynom*

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix invertierbar und wie hängt diese Matrix mit dem charakteristischen Polynom zusammen?

$$A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 7 \\ -4 & 3 & -5 \\ -7 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 *Eigenwerte Teil 2*

Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A. Folgern Sie aus den Eigenwerten von A die Eigenwerte von A^2, A^3 und A^4 sowie die Matrix A^4.

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1-i & 0 & 1-i \\ -1-i & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & -1-i \\ 1-i & 0 & -1-i & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 *ein Beweis*

Gegeben sein eine $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sowie eine invertierbare $n \times n$-Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Drücken Sie (soweit möglich) die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen durch die Eigenwerte und Eigenvektoren von A bzw. B aus.

a) $r \cdot A$ mit $r \neq 0$

b) A^k mit $k \in \mathbb{N}$

c) A^{-1} falls A invertierbar

d) $B^{-1} \cdot A \cdot B$

e) A^T

Aufgabe 6 *eine alte Klausuraufgabe*

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

a) Geben Sie für Kern(f) und Bild(f) jeweils die Dimension und eine Basis an.

b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}^T$ ein Eigenvektor von A ist.

c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A und geben Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A an.

Aufgabe 7 *noch eine alte Klausuraufgabe*

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Begründen Sie, warum A invertierbar ist. Die Bestimmung von A^{-1} ist dabei nicht verlangt!

b) Zeigen Sie, dass v_1 ein Eigenvektor von A ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ.

c) Bestimmen Sie den Eigenvektor v_2 von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -5$.

d) Bestimmen Sie den fehlenden Eigenwert $\lambda_3 \notin \lambda_1, \lambda_2$ von A.

e) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A an.