Andrea Winnerl
Vorlesung Donnerstag

1 Determinanten

1.1 Allgemeines

Für jede quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ lässt sich ein Skalar det $A \in K$, die sogenannte Determinante berechnen. Somit ist die Determinante ein ganz bestimmtes Polynom det: $K^{n\times n} \to K$ in den Einträgen der Matrix. Alternativ lässt sich die Determinante det: $(K^n)^n \to K$ als die Abbildung von n n-dimensionalen Vektoren (Spalten der Matrix) auf K sehen. Die Determinanten von 2×2 und 3×3 Matrizen lassen sich sehr einfach berechnen:

$\underline{2 \times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Im Falle K = $\mathbb{R}$ entspricht die Determinante der Matrix A der Fläche F des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Beispiel:

$$det(A) = det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -1$$

$\underline{3 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - b_3 \cdot c_2 \cdot a_1 - c_3 \cdot a_2 \cdot b_1$$

Im Falle K = $\mathbb{R}$ entspricht die Determinante der Matrix A dem Volumen V des Spats mit den Kanten a, b und c.

Beispiel:

$$det(A) = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

1.2 charakteristische Eigenschaften der Determinante

- normiert
  $det(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$
- multilinear
  $det(a_1...a_i + \acute{a}_i...a_n) = det(a_1...a_i...a_n) + det(a_1...\acute{a}_i...a_n)$
  $det(a_1...\lambda \cdot a_i...a_n) = \lambda \cdot det(a_1...a_i...a_n)$
- antikommutativ
  $det(a_1...a_i...a_j...a_n) = -det(a_1...a_j...a_i...a_n)$

Die drei Eigenschaften bestimmen die Determinante eindeutig.

1.3 Folgerungen und Rechenregeln

(i) 2 Spalten sind identische ($a_i = a_j$ mit $i \neq j$)
$\Rightarrow det(a_1...a_i...a_j...a_n) = 0$

(ii) a_n ist eine Linearkombination der Vektoren $a_1...a_{n-1}$
$\Rightarrow det(a_1...a_n) = 0$

(iii) $det(A) = det(A^T)$

Beispiel:

$$det(A) = det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 14$$
$$det(A^T) = det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 14$$

(iv) Determinante ist linear in jeder Zeile und verhält sich alternierend bezüglich Zeilenvertauschungen.

(v) Determinante und Zeilenumformungen

- Das Vertauschen zweier Zeilen ändert das Vorzeichen der Determinante.
- Die Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert die Determinante nicht.
- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$
  Dann gilt: $det(..\lambda \cdot z_i...) = \lambda \cdot det(...z_i...) \Rightarrow det(\lambda \cdot A) = (\lambda)^n \cdot det(A)$

(vi) $rang(A) < n \Leftrightarrow det(A) = 0$

(vii) Produktsatz

$$\text{Sei } A, B \in K^{n \times n} \Rightarrow det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

(viii) $det(E_n) = 1$

(ix) $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1} \wedge det(A^k) = (det(A))^k$ mit $k \in N$

(x) $A, B, C \in K^{n \times n}$

$$det(A \cdot B \cdot C) = det(B \cdot A \cdot C) = det(B \cdot C \cdot A)$$

(xi) Invertierbarkeitskriterium

$$\text{Sei } A \in K^{n \times n} \text{ und A invertierbar} \Leftrightarrow det(A) \neq 0$$

1.4 Spezialfälle

(i) obere Dreiecksmatrix

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & * & * \\ 0 & d_2 & * & * \\ 0 & 0 & .. & * \\ 0 & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist das Produkt der Diagonalelemente, also $det(M) = d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

da sich die Matrix A in oberer Dreiecksform befindet.

(ii) Matrix besteht aus Blöcken

$$M = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Die Determinante einer solchen Matrix ist das Produkt aus der Determinante von A und der Determinante von B, also $det(M) = det(A) \cdot det(B)$

Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ 3 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow det(M) = det(A) \cdot det(B) = \underbrace{det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{-5} \cdot \underbrace{det\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{-12} = 60$$

(iii) Determinante mittels Gauß-Algorithmus berechnen

Durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen bringt man die Matrix auf Dreicksform. Die Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert das Vorzeichen der Determinante nicht. Das Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten kehrt das Vorzeichen der Determinante um.

Beispiel:

$$\text{Sei A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{1}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{2}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Schritt	2. Schritt
$z_2 \rightarrow z_2 - \frac{1}{2} \cdot z_1$	$z_3 \rightarrow z_3 - 4 \cdot z_2$
$z_3 \rightarrow z_3 - z_1$	

Die Matrix ist nun in oberer Dreicksform und die Determinanten lässt sich als das Produkt der Diagonalelemente berechnen:

$$det(A) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

(iv) Entwicklung nach einer Spalte bzw. Zeile

Entwicklung von A nach der l-ten Spalte:
$det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} \cdot a_{kl} \cdot det(A_{kl})$

Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der 2. Spalte

$$det(A) = -0 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Spalte

$$det(B) =$$
$$+1 \cdot det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Entwicklung von A nach der k-ten Zeile:
$det(A) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k+l} \cdot a_{kl} \cdot det(A_{kl})$

Die Matrix A_{kl} entsteht aus der Matrix A durch Streichen der k-ten Zeile und der l-ten Spalte.

Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Zeile

$$det(A) = +1 \cdot det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 0 \cdot det8 \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot det \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = +1 \cdot det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 6$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Zeile

$$det(B) =$$
$$+1 \cdot det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 9 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} - 4 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(v) $A \in K^{n \times n}$ und $(k, l) \in 1, ...n$ derart, dass $a_l = e_k$
d.h. der l-te Spaltenvektor von A ist der k-te Standardspaltenvektor. Dann gilt:

$$det(A) = (-1)^{(k+l)} \cdot det(A_{kl})$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Der 2. Spaltenvektor ist der 3. Standardvektor. A_{32} erhält man durch Streichen der 3. Zeile und der 2. Spalte.

$$det(A_{32}) = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -7$$
$$det(A) = (-1)^{3+2} \cdot det(A_{32}) = (-1) \cdot (-7) = 7$$

(vi) Vandermonde Determinante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$$
$$det(A) = (y - x) \cdot (z - x) \cdot (z - y)$$

allgemein:

$$det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^{n-1} \\ .. & .. & .. \\ 1 & x_n & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

In diesem Beispiel ist $x = 2$, $y = 3$ und $z = 4$, somit lautet die Determinante:

$$det(A) = (y - x) \cdot (z - x) \cdot (z - y) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

1.5 Determinante und lineare Gleichungssysteme

$\underline{n=3}$
$a_1, a_2, a_3 \in K^3$ und $b \in K^3$

Lösen Sie die folgenden Gleichung: $\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 \cdot a_3 = b$

Betrachten Sie: $det(a_1, a_2, y)$ als Funktion von $K^3 \to K$. Hierbei sind die Parameter a_1 und a_2 fest und y ist variabel.

$det(a_1, a_2, \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 \cdot a_3) = det(a_1, a_2, b) \Leftrightarrow det(a_1, a_2, a_1) \cdot \lambda_1 + det(a_1, a_2, a_2) \cdot \lambda_2 + det(a_1, a_2, a_3) \cdot \lambda_3 = det(a_1, a_2, b)$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{det(a_1,a_2,b)}{det(a_1,a_2,a_3)}$$

Analog berechnet man λ_1 und λ_2.

Die Formeln zur Berechnung von λ_1, λ_2 und λ_3 nennt man die Cramersche Regel.

$$\lambda_1 = \frac{det(b,a_2,a_3)}{det(a_1,a_2,a_3)},\ \lambda_2 = \frac{det(a_1,b,a_3)}{det(a_1,a_2,a_3)},\ \lambda_3 = \frac{det(a_1,a_2,b)}{det(a_1,a_2,a_3)}$$

Diese Methode ein lineares Gleichungssytem mit Hilfe der Determinanten zu lösen, funktioniert auch im K^n.

$$\lambda_1 \cdot a_1 + ... + \lambda_n \cdot a_n = b$$

$$\Rightarrow \lambda_i = \frac{det(a_1 ... a_{i-1}, b, a_{i+1}, ... a_n)}{det(a_1 ... a_n)}$$

1.6 inverse Matrix

$A \in GL(n,K) = \{T \in K^{n \times n} : det(T) \neq 0\}$, $(\hat{a}_{kl})_{k,l=1..n} = A^{-1}$

$\hat{a}_{kl} = \frac{1}{det(A)} \cdot (-1)^{k+l} \cdot det(A_{lk})$ mit $k,l = 1..n$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

In diesem Beispiel ist $det(A) = 2$, $A_{11} = 3$, $A_{12} = 7$, $A_{21} = 4$, $A_{22} = 10$.
$\hat{a_{11}} = \frac{1}{2} \cdot (-1)^{1+1} \cdot det(A_{11}) = \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot A_{11} = \frac{3}{2}$
$\hat{a_{12}} = \frac{1}{2} \cdot (-1)^{1+2} \cdot det(A_{21}) = \frac{-4}{2}$
Analog lassen sich die anderen Matrixelemente berechnen, somit ergibt sich für die inverse Matrix:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$$

Für eine 2×2-Matrix A mit $det(A) \neq 0$ lässt sich die inverse Matrix A^{-1} immer nach folgender Formel berechnen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1.7 Adjunkte

$A \in K^{n \times n}$
$\tilde{A} = (\tilde{a}_{kl})_{k,l=1..n}$
$\tilde{a}_{kl} = (-1)^{k+l} \cdot det(A_{lk})$
$\tilde{A}$ ist die Adjunkte zu A.

Es gilt: $\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A} = det(A) \cdot E_n$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$\tilde{a_{11}} = (-1)^{1+1} \cdot det(A_{11}) = 1 \cdot A_{11} = 3$
Analog lassen sich die anderen Matrizenelemente berechnen und für die adjungierte Matrix erhält man:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man die Matrix A und die adjungierte Matrix $\tilde{A}$ so erhählt man:

$$A \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = det(A) \cdot E_2$$

2 Eigenvektoren und Eigenwerte

Definition 2.1 *Eigenwert*

$A \in K^{n \times n}$ $\lambda \in K$ heißt Eigenwert, falls es ein $v \in K^n$ gibt mit $v \neq 0$ und $A \cdot v = \lambda \cdot v$.

Definition 2.2 *Eigenvektor*

Der Vektor v heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ. Ein Eigenvektor wird durch die Matrix A auf das λ-fache seiner selbst abgebildet.

Definition 2.3 *charakteristisches Polynom $\chi_A(\lambda)$*

Das charakteristische Polynom ist definiert durch: $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot E)$

Satz 2.4

$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot E) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von A.

Definition 2.5 *Eigenraum*

Der Eigenraum $E_A(\lambda)$ zum Eigenwert λ ist defniert durch: $E_A(\lambda) = Kern(A - \lambda \cdot E)$
Alle Eigenvektoren v zum Eigenwert λ liegen im $E_A(\lambda) \setminus \{0\}$.

Achtung:

Für alle Eigenvektoren v gilt immer: $v \neq 0$
$0 \in K$ kann ein Eigenwert sein!

2.1 Berechnung

Gegeben ist die Matrix A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Gesucht sind die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume der Matrix A.

<u>1. Schritt: Berechnung der Eigenwerte</u>

$det(A - \lambda \cdot E) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von A.

$$det(A - \lambda \cdot E) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Entwicklung der Determinanten nach der 1. Spalte

$$det(A - \lambda \cdot E) = (1-\lambda) \cdot det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} - (-2) \cdot det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 1)$$

Die Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$.

<u>2.Schritt: Berechnung der Eigenvektoren</u>

$(A - \lambda \cdot E) \cdot v = 0$ mit v ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ

<u>für $\lambda_1 = -1$:</u>

$$(A - \lambda_1 \cdot E) = (A + E) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot v = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>für $\lambda_2 = 1$:</u>

$$(A - \lambda_2 \cdot E) = (A - E) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot v = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>für $\lambda_3 = 2$:</u>

$$(A - \lambda_3 \cdot E) = (A - 2 \cdot E) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot v = 0 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.Schritt: Berechnung der Eigenräume

$E_A(\lambda) = Kern(A - \lambda \cdot E)$

$$E_A(\lambda_1) = E_A(-1) = Kern(A + E) = Kern \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_A(-1) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in K\} = K \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_A(\lambda_2) = E_A(1) = Kern(A - E) = Kern \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_A(1) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 2 \cdot \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in K\} = K \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_A(\lambda_3) = E_A(2) = Kern(A - 2 \cdot E) = Kern \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E_A(2) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \alpha \\ -\alpha \\ 2 \cdot \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in K\} = K \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.2 Eigenwerte und Matrizenmessgrößen

- $det(A)$ Determinante von A
- $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot E)$ charakteristisches Polynom von A

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n + (-1)^{n-1} \cdot spur(A) \cdot \lambda^{n-1} + ... + det(A)$$

- $spur(A) = \sum a_{ii}$
  Spur von A = Summe der Diagonalelemente

$$B \in K^{m \times n} \text{ und } C \in K^{n \times m} \rightarrow spur(B \cdot C) = spur(C \cdot B)$$

- $A \in K^{n \times n}$ mit $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot .... \cdot (\lambda_n - \lambda)$
  Das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren. Dann gilt:

$$det(A) = \prod \lambda_i \text{ und } spur(A) = \sum \lambda_i$$