Thomas Reifenberger
Larissa Hammerstein
Musterlösung Mittwoch

Ferienkurs Lineare Algebra für Physiker
WS 2008/09

Aufgabe 1 *Lösung*

a) Ein allgemeines lineares Gleichungssystem ist eine Gleichung der Art $A \cdot x = b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix ist und $x, b \in \mathbb{R}^n$ (Spalten-)Vektoren.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge (also die Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$, die $A \cdot x = b$ erfüllen) kann leer sein, sie kann genau eine Lösung enthalten oder unendlich viele.

Ist $b = 0$ so heißt die Gleichung homogen, ansonsten inhomogen.

b) Man kann jede Gleichung als Bestimmungsgleichung einer Ebene in Ebenennormalform interpretieren. Der Schnitt aller Ebenen ist die Lösungsmenge. Sind zwei (oder mehrere) Ebenen parallel (ohne dass sie zusammenfallen), gibt es keine Lösung. Schneiden sie sich alle in einem Punkt, ist die Lösungsmenge nur dieser Schnittpunkt. Für den Fall unendlich viele Lösungen gibt es viele Möglichkeiten: Ebenen könnten zusammenfallen oder sie könnten sich in einer Geraden schneiden.

c) Lösen „per Hand“: Wir haben folgende drei Gleichungen:

$$\text{(i)} x_1 - x_2 + 4x_3 = -8$$

$$\text{(ii)} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3x_1 + x_3$$

$$\text{(iii)} - 3x_1 + x_2 - 7x_3 = 12 \Rightarrow -3x_1 + (3x_1 + x_3) - 7x_3 = 12$$

Aus Gleichung (iii) erhält man $-6x_3 = 12$, also ist $x_3 = -2$ und aus Gleichung (ii) erhalten wir $x_2 = 3x_1 - 2$. Das setzen wir in Gleichung (i) ein:

$$x_1 - (3x_1 - 2) + 4 \cdot (-2) = -8 \Rightarrow -2x_1 = -2 \Rightarrow x_1 = 1$$

Daher ist die Lösungsmenge gegeben durch $\{(1, 1, -2)\}$.

Aufgabe 2 *Lösung*

Die Bedingung $v = (6, -4, 2, -2)^T \in \text{Span}M$ ist äquivalent zur Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$, das durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & | & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & | & -4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & | & 2 \\ -2 & 3 & 7 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

Entsprechend: Die Bedingung $v = (1, 3, -1, 2)^T \in \text{Span}M$ ist äquivalent zur Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$, das durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & | & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & | & -1 \\ -2 & 3 & 7 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Wir fassen beide Systeme in einer Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & | & 6 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & | & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & | & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 7 & 1 & | & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

zusammen und lösen beide Systeme gleichzeitig. Der Gauß-Algorithmus liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & | & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & | & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist $(6,-4,2,-2)^T \in \mathrm{Span}M$ und $(1,3,-1,2)^T \notin \mathrm{Span}M$. Um $(6,-4,2,-2)^T$ als Linearkombination von M darzustellen ist das durch die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & | & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -3 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ zu lösen. Wiederum liefert der Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -3 \end{pmatrix}$$

Eine Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist $(1,1,0,-3)^T$ und tatsächlich ist

$$v = (6,-4,2,-2)^T = 1 \cdot (1,1,-1,-2)^T + 1 \cdot (2,1,0,3)^T - 3 \cdot (-1,2,-1,1)^T$$

eine Darstellung von $v = (6,-4,2,-2)^T$ als Linearkombination von M.

Aufgabe 3 *Lösung*

Das LGS lautet in Matrix-Schreibweise $Ax = w$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ a & 4 & -4 \\ 14 & -2 & 8 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ b \end{pmatrix}$$

d.h. die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$(A,w) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 2 \\ a & 4 & -4 & | & -6 \\ 14 & -2 & 8 & | & b \end{pmatrix}$$

Nun werden elementare Zeilenumformungen angewendet, um diese auf Zeilenstufenform zu bringen. Dabei vereinfacht sich das Rechnen erheblich, wenn die Parameter a und b erst am Ende „ins Spiel kommen “. Es ist also vorteilhaft, die erste und zweite Spalte von A zu vertauschen. Darf man das!? Ja, denn dies entspricht nur einer geänderten Reihenfolge der Unbekannten

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

wogegen nichts einzuwenden ist, solange man es bei der Rückwärtssubstitution zum Ausrechnen der Lösung berücksichtigt!!!!!!

Arbeiten wir also mit $\hat{A}\hat{x} = w$, wobei

$$(\hat{A},w) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 4 & a & -4 & | & -6 \\ -2 & 14 & 8 & | & b \end{pmatrix}$$

Elementare Zeilenumformungen ergeben:

$$(\hat{A}, w) \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & a+12 & 4 & | & 2 \\ 0 & 8 & 4 & | & b-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ = \text{Zeile } 2 + 4 \cdot \text{Zeile } 1 \\ = \text{Zeile } 3 - 2 \cdot \text{Zeile } 1 \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 8 & 4 & | & b-4 \\ 0 & a+12 & 4 & | & 2 \end{pmatrix} \text{ Zeilen 2 und 3 vertauschen}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 8 & 4 & | & b-4 \\ 0 & 0 & -\frac{a}{2} - 2 & | & 2 - \frac{(a+12)(b-4)}{8} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = \text{Zeile } 3 - \frac{a+12}{8} \cdot \text{ Zeile } 2 \end{matrix}$$

a) Für $b = 2$ lautet die letzte Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 8 & 4 & | & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{a}{2} - 2 & | & 5 + \frac{a}{4} \end{pmatrix} := (A', w')$$

Es gilt: Das Gleichungssystem ist nicht lösbar $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{Rang} A' < \text{Rang}(A', w') \Leftrightarrow -\left(\frac{a}{2} + 2\right) = 0 \wedge 5 + \frac{a}{4} \neq 0 \Leftrightarrow a = -4.$$

Nichtlösbarkeit des Systems liegt also genau bei $a = -4$

b) Für $a = -4$ lautet die umgeformte erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 8 & 4 & | & b-4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 6-b \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist das System genau dann lösbar, wenn $b = 6$ ist. Dann wird die Matrix (nach Division der 2. Zeile durch 2) zu

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 4 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

und hat den Rang 2. Der Lösungsraum hat also die Dimension $3 - 2 = 1$.
Bestimmung des Lösungsraums:

$x_3 =: \lambda$ beliebig in $\mathbb{R}$;

$4x_1 + 2\lambda = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lambda$; **Reihenfolge der Variablen beachten!!!**

$-x_2 + 3(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lambda) + 2\lambda = 2 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\lambda$

Also ist der Lösungsraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lambda \\ -\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 *Lösung*

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\to B = \{a_1, a_2\}$ und $k = 2$, denn offensichtlich hat die Matrix $\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$ Rang 2 und die gesuchte Basis muss aus 2 unabhängigen Vektoren bestehen.

b) Nach Teilaufgabe a) gilt:

$$\operatorname{Span}\{a_3, a_4\} \subset \operatorname{Span}\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \operatorname{Span}\{a_1, a_2\}$$

da a_1, a_2 bereits eine Basis bilden. Bei Gleichheit muss gelten:

$$\dim \operatorname{Span}\{a_3, a_4\} \stackrel{!}{=} \dim \operatorname{Span}\{a_1, a_2\} = 2$$

Da a_3 und a_4 offensichtlich linear unabhängig sind, ist diese Bedingug erfüllt und es gilt

$$\operatorname{Span}\{a_1, a_2\} = \operatorname{Span}\{a_3, a_4\}$$

Aufgabe 5 *Lösung*

a) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & -2 & -11 & -3 \\ 4 & 12 & -6 & -8 & 6 \\ 2 & 6 & 2 & -14 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{c} II-3I \\ III-4I \\ IV-2I \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & -30 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & -30 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & -30 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{10}I \\ II-I \\ III-I \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I+4II}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)II]{(-1)I} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Die partikuläre Lösung ist $x_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Kern ist gleich $\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} II-2I \\ IV+3I \\ V-I \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 10 & -8 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I+3II \\ III+4II \\ IV+10II \\ V-II \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -11 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 2 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (-1)I \\ II-III \\ (-1)III \\ IV-2III \end{array} \rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & -1 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} III-\frac{19}{2}IV \\ \frac{1}{2}IV \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist die einzige Lösung.

c) $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
Dieses Gleichungssystem besitzt überhaupt keine Lösung.

Diese drei Beispiele stehen im Widerspruch zu einer häufig benutzten Faustregel $f = n - m$, falls $n \geq m$, wobei n die Anzahl der Unbekannten, m die Anzahl der Gleichungen und f die Anzahl der freien Parameter in der Lösungsgesamtheit bedeutet. Die Faustregel hat rein statistischen Wert. Die **mathematisch korrekte Formel** für die Anzahl der freien Parameter lautet

$$f = n - \operatorname{rg}(A) = \dim(\ker(A)) \quad \text{falls das Gleichungssystem lösbar ist}$$

Da für eine $m \times n$-Matrix $m \geq \operatorname{rg}(A)$ ist, ist bei lösbarem Gleichungssystem immer $f = n - \operatorname{rg}(A) \geq n - m$. Die Anzahl der freien Parameter kann also größer sein als durch die (i.A. falsche) Faustregel berechnete Wert!!!!

Aufgabe 6 *Symmetrische Matrizen – Lösung*

a) Prüfe die notwendigen Eigenschaften:

nichtleer Offensichtlich gilt $0_n \in \mathcal{M}_n^{sym}(\mathbb{K})$.

linear Seien $A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n^{sym}(\mathbb{K})$. Des weiteren sei $A + B = C = (c_i j)$ Dann gilt:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}$$

Damit ist C symmetrisch und damit gilt $C = A + B \in \mathcal{M}_n^{sym}(\mathbb{K})$.
Sei nun $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

$$\lambda a_{ij} = \lambda a_{ji}$$

Damit ist auch $\lambda A \in \mathcal{M}_n^{sym}(\mathbb{K})$.

b) Wähle die kanonische Basis:

$$K = \left\{ \begin{array}{ccc} & i\text{-te Spalte} & j\text{-te Spalte} \\ & \downarrow & \downarrow \\ \left(\begin{array}{cccc} \; & & 1 & \\ & 1 & & \end{array} \right. & & \left. \right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \end{array} \;\middle|\; i, j \in \{1, \dots, n\} \wedge i \leq j \right\}$$

$$\dim \mathcal{M}_n^{sym}(\mathbb{K}) = |K| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2} n(n+1)$$

c) Nach Teilaufgabe b) benötigen wir 3 linear unabhängige Basisvektoren. Wir wählen der Einfachheit halber M_1, M_2 und M_3. Die Koordinatendarstellung dieser Matrizen bezüglich der kanonischen Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ lautet:

$$\underline{m}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{m}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{m}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren sind linear unabhängig, wie sich durch Herstellen der Spaltenstufenform nachweisen lässt (elementare Spaltenumformungen lassen ja bekanntlich den Spaltenraum invariant):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Gesucht sind nun $(x_1, x_2, x_3) =: \underline{x}^T$, sodass

$$x_1 M_1 + x_2 M_2 + x_3 M_3 = C \;\Leftrightarrow\; (\underline{m}_1, \underline{m}_2, \underline{m}_3)\underline{x} = \underline{c}$$

wobei $\underline{c}$ die Koordinatendarstellung von C bezeichnet. Das entspricht folgendem LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -8 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 12 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow C = -9M_1 + 10M_2 - 3M_3$$

Wählt man andere Basisvektoren, verläuft die Rechnung analog.

Aufgabe 7 *Invertierung – Lösung*

Vorgehensweise: Bringe die Matrix $(\underline{A}|\underline{E}_4)$ durch elementare Zeilenumformungen auf die Form $(\underline{E}_4|\underline{B})$. Dann ist $\underline{B} = \underline{A}^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2+Z1, Z3+Z1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2 \leftrightarrow Z1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z4-Z1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z4-5Z3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2-Z3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -6 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2/2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -\frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 *Symmetrische Matrizen 2 – Lösung*

a) Da A invertierbar ist existiert A^{-1}, so dass $AA^{-1} = E_n$. Mit $E_n = E_n^T$ folgt
$E_n = AA^{-1} = (AA^{-1})^T \Leftrightarrow AA^{-1} = (A^{-1})^T A \Leftrightarrow E_n = (A^{-1})^T A \Leftrightarrow E_n A^{-1} = (A^{-1})^T \underbrace{AA^{-1}}_{E_n}$
$\Leftrightarrow E_n A^{-1} = (A^{-1})^T E_n \Leftrightarrow A^{-1} = (A^{-1})^T$
$\Rightarrow A^{-1}$ ist symmetrisch.

b) „$\Rightarrow$“ AB ist symmetrisch, d.h. $AB = (AB)^T \Leftrightarrow AB = B^T A^T$. Mit der Symmetrieeigenschaft von A und B gilt nun $AB = BA$.
„$\Leftarrow$“ $AB = A^T B^T = (BA)^T$, mit $AB = BA$ folgt nun, dass $(BA)^T = BA$ gilt.

c) Für alle C gilt wegen der Linearität des Transponierens und wegen $(B^T)^T = B$:

$$S^T = \left(\frac{1}{2}(C + C^T)\right)^T = \frac{1}{2}(C^T + (C^T)^T) = \frac{1}{2}(C^T + C) = \frac{1}{2}(C + C^T) = S$$

$\Rightarrow S$ ist symmetrisch.

$$T^T = \left(\frac{1}{2}(C - C^T)\right)^T = \frac{1}{2}(C^T - (C^T)^T) = \frac{1}{2}(C^T - C) = -\frac{1}{2}(C - C^T) = -T$$

$\Rightarrow T$ ist schiefsymmetrisch.

Aufgabe 9 *Lösung*

Wir suchen Matrizen $\underline{X} = (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$, die die Gleichung

$$\underline{A}\ \underline{X} = \underline{B} \ \Leftrightarrow\ \underline{A}\ (\underline{x}|\underline{y}|\underline{z}) = (\underline{b}|\underline{c}|\underline{d})$$

erfüllen. Diese Gleichung kann Spaltenweise gelöst werden, man hat also effektiv die drei LGS

$$\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}\ , \quad \underline{A}\ \underline{y} = \underline{c}\ , \quad \underline{A}\ \underline{z} = \underline{d}$$

zu lösen. Dabei ist die Lösung des homogenen Systems in jedem Fall gleich $\ker \underline{A}$, jedoch muss für jede einzelne Gleichung eine partikuläre Lösung gefunden werden. Zur Lösung verwenden wir das Gauß-Verfahren, wobei wir alle drei LGS auf einmal lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -1 & 2 & 3 & \alpha \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{Z1 \leftrightarrow Z3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & 3 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow{Z3+2Z1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 1 & 14+\alpha \end{array}\right) \xrightarrow{Z3-Z2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11+\alpha \end{array}\right)$$

Das System ist offensichtlich nur lösbar, wenn $\alpha = -11$. Daher wird im Folgenden $\alpha = -11$ vorausgesetzt. Um das Rechnen zu erleichtern, werden auf der linken Seite die Spalten 2 und 3 vertauscht. Man beachte, dass sich dadurch in jedem der 3 gesuchten Vektoren $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ ebenfalls die Komponenten 2 und 3 vertauschen, da es sich hierbei *nicht* um eine elementare Zeilenumformung handelt!

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z1-Z2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z1\cdot(-1), Z2\cdot(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir bestimmen nun zunächst $\ker \underline{A}$, wobei wir daran denken müssen, dass x_2 und x_3 etc. ihre Rolle tauschen. Es ergibt sich:

$$\ker \underline{A} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Zur Lösung der inhomogenen Systeme wird die freie Variable x_2 bzw y_2 und z_2 gleich Null gesetzt. Wir lesen ab:

$$\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{y}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{z}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ,$$

Die Gesamtlösung lautet nun:

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + \left(\ker \underline{A} | \ker \underline{A} | \ker \underline{A} \right) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Man beachte, dass der Lösungsraum dreidimensional ist, da das Gleichungssystem für jede Spalte getrennt einen Freiheitsgrad erzeugt.

Aufgabe 10 *Elementarmatrizen – Lösung*

Diese Matrix vertauscht i-te und j-te Zeile:

$$\underline{Z}^1 = (\underline{Z}^1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 && \\ &&& \vdots & 1 &&& \vdots && \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots && \\ &&& \vdots &&& 1 & \vdots && \\ &&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 && \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Diese Matrix multipliziert die i-te Zeile mit dem Faktor $\lambda \neq 0$.

$$\underline{Z}^2 = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Die inverse Matrix dazu lautet:

$$(\underline{Z}^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda^{-1} &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile}$$

Diese Matrix addiert das α-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile. Dabei befindet sich das α in der j-ten Spalte und der i-ten Zeile.

$$\underline{Z}^3 = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 & \cdots & \alpha && \\ &&& \ddots & \vdots && \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix dazu lautet:

$$(\underline{Z}^3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 & \cdots & -\alpha && \\ &&& \ddots & \vdots && \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11 **Das Haus vom Nikolaus – Lösung*

Wir rechnen mit dimensionslosen Größen. Den von der Spannungsquelle kommenden bzw. dorthin zurückfließenden Strom setzen wir

$$I_{bat} = 1$$

Für die Widerstände der Glühbirnen setzen wir

$$R_{ij} = 1$$

Den Strom durch die Glühbirne L_{ij} bezeichnen wir mit I_{ij}, die dort anliegende Spannung mit U_{ij}. Dabei fließt positiver Strom vom kleineren zum größeren Knotenindex. Wenden wir nun in jedem Knoten das erste Kirchhoffsche Gesetz an, wobei in den Knoten hineinfließende Ströme positiv, hinausfließende negativ gezählt werden, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
(1) & -I_{12} & -I_{13} & & & & & & & & & = & 1 \\
(2) & +I_{12} & & -I_{23} & -I_{24} & -I_{25} & & & & & & = & 0 \\
(3) & & +I_{13} & +I_{23} & & & -I_{34} & -I_{36} & & & & = & 0 \\
(4) & & & & +I_{24} & & +I_{34} & & -I_{45} & -I_{46} & & = & 0 \\
(5) & & & & & +I_{25} & & & +I_{45} & & -I_{56} & = & 0 \\
(6) & & & & & & & +I_{36} & & +I_{46} & +I_{56} & = & -1
\end{array}$$

Durch Anwendung der Maschenregel auf die kleinsten Maschen (die mit 3 Knoten) und die Relation $U_{ij} = R_{ij} \cdot I_{ij} = I_{ij}$ ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
(1-2-3) & +I_{12} & -I_{13} & +I_{23} & & & & & & & & = & 0 \\
(2-4-3) & & & -I_{23} & +I_{24} & & -I_{34} & & & & & = & 0 \\
(2-5-4) & & & & -I_{24} & +I_{25} & & & -I_{45} & & & = & 0 \\
(4-5-6) & & & & & & & & +I_{45} & -I_{46} & +I_{56} & = & 0 \\
(3-4-6) & & & & & & +I_{34} & -I_{36} & & +I_{46} & & = & 0
\end{array}$$

Damit haben wir 11 Gleichungen und 10 Unbekannte, die wir in den Vektor $\underline{I} = (I_{12}, \ldots, I_{56})^T$ schreiben. Die Überbestimmtheit des LGS ist sehr hilfreich, um Tippfehler zu vermeiden bzw. aufzuspüren, da das System aus physikalischer Sicht eindeutig lösbar sein muss. Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Lösung mit einem Computeralgebraprogramm führt auf

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} I_{12} \\ I_{13} \\ I_{23} \\ I_{24} \\ I_{25} \\ I_{34} \\ I_{36} \\ I_{45} \\ I_{46} \\ I_{56} \end{pmatrix} = \frac{1}{57} \begin{pmatrix} 27 \\ 30 \\ 3 \\ 11 \\ 13 \\ 8 \\ 25 \\ 2 \\ 17 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Damit leuchtet das Lämpchen L_{13} am hellsten.