Thomas Reifenberger
Larissa Hammerstein
Aufgaben Mittwoch

Ferienkurs Lineare Algebra für Physiker
WS 2008/09

Aufgabe 1

a) Wie sieht ein lineares Gleichungssystem aus? Was kann man über die Lösungsmenge sagen? Was ist ein homogenes bzw. ein inhomogenes System?

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen und dessen geometrischer Interpretation? Diskutieren Sie die drei möglichen Fälle: keine Lösung, genau eine Lösung und unendlich viele Lösungen.

c) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem ohne Gauß-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^4$ sei die Teilmenge

$$M := \{(1,1,-1,2)^T, (2,1,0,3)^T, (0,-1,2,7)^T, (-1,2,-1,1)^T\} \subset \mathbb{Q}^4$$

gegeben. Prüfen Sie, ob $v \in \mathrm{Span} M$ ist für

a) $v = (6,-4,2,-2) \in \mathbb{Q}^4$

b) $v = (1,3,-1,2) \in \mathbb{Q}^4$

und stellen Sie, falls dies möglich ist, v als Linearkombination von M dar.

Aufgabe 3

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ ax_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & = & -6 \\ 14x_1 & - & 2x_2 & + & 8x_3 & = & b \end{array}$$

a) Für $b = 2$ bestimme man $a \in \mathbb{R}$ so, dass das System **nicht** lösbar ist.

b) Für $a = -4$ bestimme man $b \in \mathbb{R}$ so, dass das System lösbar ist und ermittle alle Lösungen $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.

Aufgabe 4

Gegeben sind: $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

a) Gesucht ist eine Basis B und die Dimension k von $\mathrm{Span}\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

b) Gilt $\mathrm{Span}\{a_1, a_2\} = \mathrm{Span}\{a_3, a_4\}$?

Aufgabe 5

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge und versuchen Sie, wenn möglich, einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Unbekannten, der Anzahl der Gleichungen und der Anzahl der freien Parameter herzustellen.

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & 9 & -2 & -11 \\ 4 & 12 & -6 & -8 \\ 2 & 6 & 2 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 *Symmetrische Matrizen*

Es sei $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$. Es sei $\mathcal{M}_n^{sym}(\mathbb{K}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \text{ symmetrisch}\}$ die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}_n^{sym}(\mathbb{K})$ ein Untervektorraum von $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ist.

b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathcal{M}_n^{sym}(\mathbb{K})$, indem Sie eine möglichst einfache Basis angeben.

c) Konkret im $\mathcal{M}_2^{sym}(\mathbb{R})$ betrachten wir folgende Teilmenge:

$$M = \{M_i | i = 1, \ldots, 4\} \quad \text{mit} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wählen Sie hieraus eine Basis $B \subset M$ und stellen Sie folgende Matrix als Linearkombination der Elemente von B dar:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Schreiben Sie dazu die Matrizen $M_1, \ldots, M_4$ und C in der Koordinatendarstellung der kanonischen Basis von $\mathcal{M}_n^{sym}$.

Aufgabe 7 *Invertierung*

Invertieren Sie folgende Matrix:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 *Symmetrische Matrizen 2*

Gegeben seien $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symmetrische Matrizen. C sei eine beliebige Matrix $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Ist A invertierbar, so ist auch A^{-1} symmetrisch.

b) AB ist genau dann symmetrisch, wenn $AB = BA$ gilt.

c) $S := \frac{1}{2}(C + C^T)$ und $T := \frac{1}{2}(C - C^T)$ sind symmetrisch.

Aufgabe 9

Gegeben seien die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \alpha \\ -4 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie, abhängig von α, alle Matrizen $\underline{X} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass gilt:

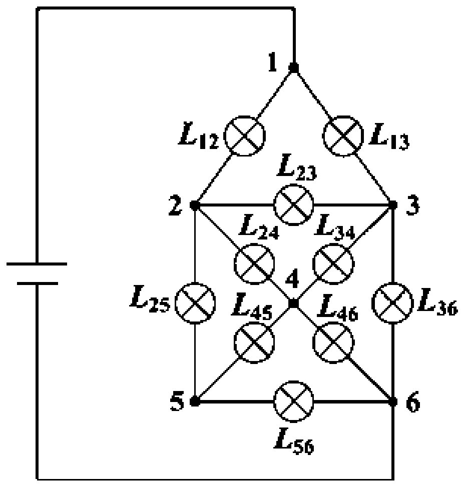
$$\underline{B} = \underline{A}\ \underline{X}$$

Aufgabe 10 *Elementarmatrizen*

Geben Sie die drei allgemeinen Elementarmatrizen sowie ihre Inversen an.

Aufgabe 11 **Das Haus vom Nikolaus*

Der Nikolaus hat sein Haus mit einer Weihnachtsbeleuchtung ausgestattet.



Hierbei hat er 10 identische Glühbirnen verwendet. Umso erstaunter ist er, als er den Strom einschaltet, und die Birnen verschieden hell leuchten sieht. Welche Glühbirne leuchtet am hellsten?
Hinweis: Benutzen Sie die Kirchhoffschen Gesetze sowie ein Computeralgebra-Programm, z.B. Mathematica oder Sage (sagemath.org)