Christian Neumann
Ferienkurs Lineare Algebra für Physiker
Aufgaben Dienstag
WS 2008/09

Aufgabe 1 *zum warmwerden*

Berechnen sie

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3+6 \\ 3-5+6 \\ 6-6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & -6 & 3 \\ 4 & 10 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-5 & 7+3 & 9+1 \\ 8+2 & -6-4 & 3-3 \\ 4+1 & 10+3 & -2+15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 10 & -10 & 0 \\ 5 & 13 & 13 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 7 & -9 & 7 \\ 15 & -17 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 & -4+4 & 4-4+8 \\ 7-9 & -7+7 & 7-9+14 \\ 15-17 & -15+11 & 15-17+22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ -2 & 0 & 12 \\ -2 & -4 & 20 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 *inverse einer* 2×2 *Matrix*

$$BA = \tfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \tfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & db-bd \\ -ac+ac & -b+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 = AB$$

Aufgabe 3 *lineare Abbildungen*

a) nicht linear, $f(x+y) = \begin{pmatrix} (x+y)+4 \\ -(x+y) \end{pmatrix} \neq f(x) + f(y) = \begin{pmatrix} (x+y)+8 \\ -(x+y) \end{pmatrix}$

injektiv ,$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+4 \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+4 \\ -y \end{pmatrix} \Rightarrow x = y$

nicht surjektiv z.B $(0,0)^T$ hat kein Urbild

b) linear $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

bijektiv, da $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ existiert

c) nicht linear,

$f \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 y_2 + y_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$

nicht injektiv $f(-1,-1) = f(1,1)$,

nicht surjektiv z.B $(-10, 5)^T$ hat kein Urbild

d) linear $\underline{A} = \underline{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

injektiv, da Kern$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \{0\}$ (Lemma 2.15) und die Komposition injektiver Abbildungen wieder injektiv ist, nicht surjektiv $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und damit nach dem Dimensionssatz Rang$(f) \leq 2$ und dim $\mathbb{R}^3 = 3$ (Lemma 2.14)

e) nicht linear,

bijektiv, da inverse Funktion $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mapsto \underline{B}^{-1} \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix} \right)$ $\quad \underline{B}^{-1}$ existiert wegen Kern$(\underline{\mathrm{B}}) = \{0\}$

Aufgabe 4

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Ist in dem Fall nicht eindeutig, da nur das Bild(f) angegeben ist und nicht die Bilder der Basen, permutieren der Spalten von A liefert die anderen möglichen Lösungen.

b) Mit der Matrix aus a). Wähle $V = \text{span }(1, x)$, $V' = \text{span }(x^2)$. Dann ist $V \oplus V' = P_2$. Es gibt nun zwei einfachere Abbildungen:
$h : V \to V$ mit Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ und
$g : V' \to V'$ mit Matrix $C = (3)$.
B^{-1} ist nach Aufgabe 2 $B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = (1/3)$.
A^{-1} ergibt sich durch zusammensetzen aus B^{-1} und C^{-1} zu
$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$
Probe: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - -6 & -3 - -3 & 0 \\ - - 10 - 10 & - - 6 - 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Nachdem A und A^-1 existiern ist f bijektiv. Damit folgt aus der Dimensionsformel dim Bild$(f) = 3$. Da das Bild von f als Span von 3 Vektoren gegeben ist, folgt dass diese linear unabhängig ist. Da dim $P_2 = 3$ folgt zudem das die Vektoren zusätzlich eine Basis bilden.

Aufgabe 5 *lineare Abbildungen II*

a) $f \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot f \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ -14 \end{pmatrix}$

b) $-5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -8 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.
$\Rightarrow \text{Kern}(f) = f^{-1} \left(\text{span } \left(5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \right) \right) = \text{span } \left(5 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \text{span } \left(\begin{pmatrix} -23 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$

c) Nach dem Dimensionssatz folgt dim Bild (f) = 2= Ranfg(f) , (dim $\mathbb{R}^3 = 3$,nach b) dim Kern$(f) = 1$)

d) Nach b) ist span $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis (Da der 2. und 3. Bildvektor linear abhängig sind). Die Vektoren sind schon Orthogonal, müssen also nur noch normiert werden. Also ist eine ONB $\frac{1}{\sqrt{404}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -8 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6 *Verknüpfung von Matrizen*

$\underline{C} := \underline{B}\ \underline{A}$
$c_{jl} = \sum_{k=1}^{m} b_{jk} a_{kl} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{jk} \lambda_{jk} a_{kl} = \delta_{jj} \lambda_{jj} a_{jl} = \lambda_{jj} a_{jl}$.
Da $a_{jl} = 0$ für $j < l$ folgt $c_{jl} = 0$ für $j < l \Rightarrow \underline{C}$ ist obere Dreiecksmatrix

Aufgabe 7 *Basistransformation*

a) $< w_i, w_j >= \delta_{ij} \qquad \Rightarrow w_1, ..., w_4$ bilden eine ONB des $\mathbb{R}^4$

b) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) Da die w_i eine ONB bilden ist dim Bild$(f) = 4 = $ Rang(f). AUs der Dimensionsformel folgt, dass dim Kern(f) = 0

d) aus c) folgt Kern$(\underline{A}) = \{0\}$, Basis Bild(A) = span (w_1, w_2, w_3, w_4)

e) Sei $\underline{\text{C}}$ die Abbildende Matrix der Funktion $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(e_i) = \underline{b_i}$ (e_i bezeichne die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$). Dann ist die gesuchte Matrix $\underline{\text{B}}$ gegeben durch $\underline{B} = \underline{CA^{-1}}$. (Anwendung des Satzes über Basiswechsel, wobei $\underline{A}^{-1} = \underline{S}$)

Aufgabe 8 *alte Klausuraufgabe*

a) Nach der Dimensionsformel muss $m = n - 1$

b) $f(b_i) = 0 \forall i \in \{0, ..., m\}, f(b_n) = a = (a_1, .., a_n)^T \Rightarrow \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

c) $\underline{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_1 a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}. = a_n \underline{A} \Rightarrow \alpha = a_n$

d) $f^k = \alpha f^{k-1} = \cdots \alpha^{k-1} f \Rightarrow$ dim Bild $(f^k) =$ dim Bild $(\alpha^{k-1} f) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{falls } \alpha = 0 \end{cases}$

Aufgabe 9 *schwer*

a) $Aw_1 = (1, 0)^T, Aw_2 = (0, 1)$

b) $< w_1, w_2 >= 0$, damit sind w_1, w_2 linear unabhängig, d.h dim Span $(w_1, w_2) = 2$. Damit ist $U := span(w_1, w_2) \simeq \mathbb{R}^2$.

c) $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist de gesuchte Matrix
$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Dies ist die Darstellung der Identitäsabbildung in $\mathbb{R}^2$,
$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} =: C$
$Cw_1 = w_1; Cw_2 = w_2$, jeder Vektor $u \in U$ lässt sich als Linearkombination der Basisvektoren w_1, w_2 darstellen $u = a \cdot w_1 + b \cdot w_2$. Das heißt $Cu = C(a \cdot w_1 + b \cdot w_2) = (a \cdot w_1 + b \cdot w_2) = u$. Damit ist C datstellung der Identitätsabbildung $id(u) = u \forall u \in U$.