Aufgabe 1 *zum warmwerden*

Berechnen sie

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & -6 & 3 \\ 4 & 10 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & 15 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 7 & -9 & 7 \\ 15 & -17 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

Aufgabe 2 *Inverse einer 2×2-Matrix*

Zeigen sie, das $B := \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ die inverse Matrix zu $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe 3 *lineare Abbildungen I*

Welche der folgenden Abbildungen ist linear,injektiv und/oder surjektiv? Geben sie für den Fall der Linearität die Abbildungsmatrix $\underline{A}$ von f an.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad x \mapsto \begin{pmatrix} x+4 \\ -x \end{pmatrix}$

b) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 - i \cdot z_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underline{B} \cdot \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{B} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \mathrm{Kern}(B) = 0$

e) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mapsto \underline{B} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}, \qquad \underline{B} \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \mathrm{Kern}(B) = 0$

Aufgabe 4

Sei P_2 der Vektorraum aller Polynomfunktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. Die Mononome $1, x, x^2$ bilden eine Basis B dieses Vektorraums. Sei $f : P_2 \to P_2$ eine lineare Abbildung mit Bild(f) $=$ Span$(1-2x, 5x-3, 3x^2)$.

a) Finden sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die f darstellt.

b) Finden sie die zu A inverse Matrix A^{-1}.
Hinweis: Um nicht 9 Gleichungen mit 9 Unbekannten lösen zu müssen schreiben sie P_2 als direkte Summe zweier UVR und benutzen sie Aufgabe 2.

c) Begründen sie mit a) und b) das $1-2x, 5x+1, 3x^2$ eine Basis B' des Vektorraums P_3 ist.

Aufgabe 5 *lineare Abbildungen II*

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\18\\-8\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\10\\15\end{pmatrix}$

a) Bestimmen sie das Bild von $\begin{pmatrix}-7\\6\\3\end{pmatrix}$

b) Bestimmen sie den Kern von f

c) Bestimmen sie den Rang(f)

d) Geben sie eine ONB von Bild (f) an.

Aufgabe 6 *Verknüpfung von Matrizen*

Zeigen sie, dass das Produkt einer oberen Dreiecksmatrix mit einer Diagonalmatrix eine obere Dreicksmatrix ergibt.
Hinweise:
Für eine obere Dreiecksmatrix $\underline{\mathrm{A}} = a_{ij}$ gilt $a_{ij} = 0$ für $i < j$.
Eine Diagonalmatrix $\underline{\mathrm{B}} = b_{ij}$ gilt $b_{ij} = \lambda_{ij}\delta_{ij}$, $\quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Aufgabe 7 *Basistransformation*

Gegeben seien $\underline{w_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\underline{w_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{w_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\underline{w_4} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$

a) Zeigen sie das das die $\underline{w_i}$ eine ONB des $\mathbb{R}^4$. bilden

b) Geben sie die Matrix $\underline{A}$ an, die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ auf die $\underline{w_i}$ abbildet ($\underline{A}\underline{e_i} = \underline{w_i}$).

c) Bestimmen sie Rang($\underline{A}$) und dim Kern($\underline{A}$).

d) Bestimmen sie den Kern($\underline{A}$) und eine Basis Bild($\underline{A}$)

e) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $f(\underline{w_i}) = \underline{b_i}$. Geben sie eine Matrix $\underline{B}$ an, die diese Abbildung darstellt.
Hinweis: $\underline{A}^{-1}$ muss nicht explizit bestimmt werden es reicht die Form $\underline{B} = \underline{CDA}^{-1}\underline{F}$ (oder auch weniger Matrizen)

Aufgabe 8 *alte Klausuraufgabe*

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit Rang 1. Ferner sei $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V mit $(b_1, ..., b_m) \in \mathrm{Kern}(f)$ $(m \leq n)$.

a) Welchen Wert hat m ?

b) Beschreiben sie die Abbildungsmatrix $\underline{A}$ von f bzgl. der Basis B. Hierfür sei $f(b_i) = \underline{a_i} = (a_{i1}, ..., a_{in})^T$.

c) Zeigen sie, dass ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $f^2 = \alpha f$ (Hinweis $f^n = \underbrace{f \circ f .... \circ f}_{n \text{ mal}}$).

d) Welchen Rang hat f^k für $k > 1 \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 9 *schwer*

Gegeben seien $w_1 := (1, 1, 2)^T, w_2 := (2, -4, 1)^T$ und eine Matrix $A := \begin{pmatrix}2/3 & 1/3 & 0\\1/6 & -1/6 & 0\end{pmatrix}$

a) Berechnen sie Aw_1, Aw_2

b) Finden sie einen UVR $U \subset \mathbb{R}^3$ derart, dass A einen Isomorphismus von U nach $\mathbb{R}^2$ darstellt.

c) Bilden sie eine Matrix B derart, dass $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = w_1, B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = w_2$, und zeigen sie dass AB Darstellung der Idenditätsabbildung $\mathbb{R}^2$, BA darstellung der Identitätsabbildung in U bzgl. der Basis w_1, w_2 ist.