TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

CHRISTIAN NEUMANN

FERIENKURS LINEARE ALGEBRA FÜR PHYSIKER

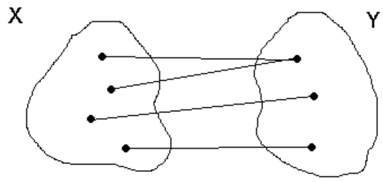
VORLESUNG DIENSTAG

WS 2008/09

Thema des heutigen Tages sind zuerst Abbildungen, dann spezielle Eigenschaften linearer Funktionen und als letztes Matrizen, mit derer Hilfe man lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen beschreiben kann.

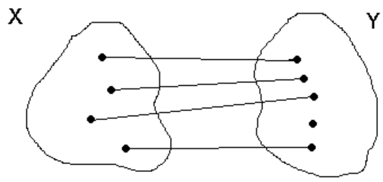
1 Eigenschaften von Abbildungen

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung



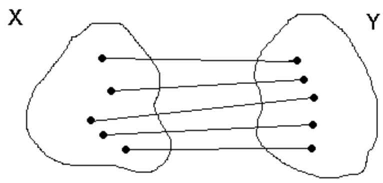
Definition 1.1 *surjektiv*

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$



Definition 1.2 *injektiv*

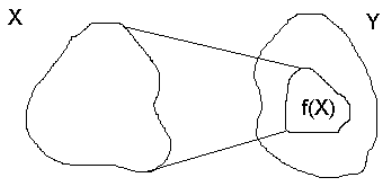
$$\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$



Definition 1.3 *bijektiv*

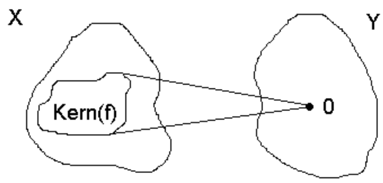
$$\forall y \in Y \exists_1 x \in X : f(x) = y$$

oder auch injektiv und surjektiv
Hinweis: ist f bijektiv, dann existiert eine Umkehrabbildung f^{-1} die eindeutig bestimmt und auch bijektiv ist.



Definition 1.4 *Bild*

$$f(X) =: Bild(f) \subset Y$$



Definition 1.5 *Kern*

$$f^{-1}(\{0\}) =: Kern(f) \subset X$$

Hinweis: $f^{-1}(\{0\})$ bezeichnet das Urbild von 0 und nicht die Umkehrfunktion.

2 Lineare Abbildungen

Definition 2.1 *Lineare Abbildung*

Seien V, W K-VR.
Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *linear* wenn gilt

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \qquad \forall x, y \in V, \lambda \in K$$

Zunächst einige Namen für spezielle lineare Abbildungen.

2.1 Homomorphismus,Isomorphismus und Automorphismus

Definition 2.2 *Homomorphismus*

Seinen V und W K-VR. Dann bezeichnet Hom(V,W) die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W.

Definition 2.3 *Endomorphismus*

Sei V ein K-VR. Weiter sei $f : V \to V$ linear. Dann ist f ein Endomorphismus.

Definition 2.4 *Isomorphismus*

Seien V, W VR. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt Isomorphismus, wenn f linear und bijektiv ist. V und W heißen dann isomorph, Man schreibt $V \simeq W$

Definition 2.5 *Automorphismus*

Aut(V) bezeichnet die Menge aller Automorphismen von V, d.h. die Menge aller Isomorphismen von V nach V.

Satz 2.6

Hom(V,W) ist ein UVR von W^V versehen mit den punktweise definierten VR-Verknüpfungen. Dies bedeutet, dass Linearkombinationen von linearen Abbildungen wieder lineare Abbildungen ergeben.

Lemma 2.7

Es gilt f Isomorphismus $\Rightarrow f^{-1}$ Isomorphismus

Korollar 2.8

Seinen V, W VR und dim $V < \infty$. Dann gilt:

$$V \simeq W \Longleftrightarrow \dim V = \dim W$$

Korollar 2.9

Sei V ein $K - VR$ mit dim $V < \infty$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$V \simeq K^n \Longleftrightarrow n = \dim V$$

Der nächste Satz entspricht der Basistransformation von Matrizen.

Lemma 2.10

Seinen V, V', W, W' VR,$f_V \to W$ linear, sowie $s : V \to V'$ und $t : W \to W'$ Isomorphismen. Setze $f' := t \circ f \circ s^{-1}$. Dann ist Dann ist f' surjektiv bzw. injektiv genau dann, wenn f surjektiv bzw. injektiv ist, und es gelten:

$$\text{dim Bild}(f') = \text{dim Bild}(f) \text{ und dim Kern}(f') = \text{dim Kern } (f)$$

2.2 Grundlegende Eigenschaften

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und V,W VR in allen folgenden Sätzen.

Satz 2.11

Seinen $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V und $y_1, ..., y_n$ Vektoren aus W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ derart, dass $f(v_i) = y_i \forall i \in \{1, ..., n\}$

Lemma 2.12

Bild(f) bzw. Kern(f) ist ein UVR von V bzw. W Dies bedeutet insbesondere, das man Basen finden kann.

Definition 2.13 *Rang(f)*

Der Rang(f) := dim Bild(f) heißt Rang von f
Die beiden folgenden Sätze liefern einfachere Kriterien, ob eine lineare Abbildung surjektiv, bzw. injektiv ist, als die abstrakten Definitionen.

Lemma 2.14

$$f \text{ surjektiv} \iff \text{Rang}(f) = \dim W$$

Lemma 2.15

$$f \text{ injektiv} \iff \text{Kern}(f) = \{0\}$$

Zusammen mit der Dimensionsformel liefern sie weitere praktische Sätze.

Satz 2.16 *Dimensionsformel*

Sei dim V $< \infty$

$$\dim V = \text{Rang}(f) + \dim \text{Kern}(f)$$

Die Dimensionsformel liefert also einen einfachen Zusammenhang zwischen Kern,Bild und der Dimension des ursprünglichen Vektorraums. Sie ist auch in Klausuraufgaben praktisch um Lösungen zu überprüfen.
zum Beispiel: Sei $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$ linear.
a) Zeigen sie das v_1, v_2 eine Basis von Kern(f) bilden ($\Rightarrow$ dim Kern(f) = 2)
b) Finden sie eine Basis vom Bild(f). (dim V - dim Kern(f) = 4 - 2 = dim Bild(f), d.h. finde ich zwei linear unabhängige Vektoren w_1, w_2 ist die Lösung vermutlich richtig.)

Der nächste Satz ist insbesondere praktisch, da man aus ihm folgen kann, dass das Bild der Basis von V einen Span des Bildes liefern.

Lemma 2.17

Sei $M \subset V$ Dann gilt

$$f(\text{Span } M) = \text{Span } f(M)$$

Lemma 2.18

f sei zusätzlich injektiv. Seien $x_1, .., x_n$ linear unabhängig in V. Dann sind $f(x_1), ..., f(x_n)$ linear unabhängig in W

Lemma 2.19

Sei dim W = dim V < ∞. Dann gilt:

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv}$$

Definition 2.20 *direkte Summe*

Ein VR V heißt direkte Summe der UVR U und U', wenn

$$U + U' = V \text{ und } U \cap U' = \{0\}$$

In diesem Fall heißt U ein VR-Komplement von U'. Man schreibt

$$V = U \oplus U'$$

Lemma 2.21

Sei $V = U \oplus U'$. Dann gilt für jedes $x \in V : \exists u \in U, u' \in U'$ mit

$$x = u + u'$$

3 Matrizen

Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen können mittels Matrizen bestimmt werden. Dabei sind die Spaltenvektoren der Matrix durch die Bilder der Basisvektoren gegeben. Sei $f : V \to W$ nun eine lineare Abbildung und $\underline{a_l} := f(v_l)$ $((v_1, ..., v_n)$ Basis von $V, \underline{a_l} \in W$).Dann ist die Abbildungsmatrix $\underline{\text{A}}$ von f bzgl. der Basis $(v_1, ..., v_n)$ gegeben durch

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ \underline{a_1} & \cdots & \underline{a_l} \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{kl})_{\substack{\text{k=1,...,m} \\ \text{l=1,...,n}}}$$

Für das Bild eines Vektors der die Koordinaten ξ_l bezüglich der Basis v_l hat ergibt sich dann:

$$\eta_k = \sum_{l=1}^{m} a_{kl}\xi_l \qquad \text{für} \quad k = 1, ..., m$$

als Matrix geschrieben

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$$

kurz

$$\underline{\eta} = \underline{A\xi}$$

Satz 3.1 *Matrix als lineare Abbildung*

Sei $\underline{\text{A}} \in K^{m \times n}$. Dann ist

$$L_A : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}, \qquad L_A(\underline{\xi}) := \underline{A\xi}$$

eine lineare Abbildung. Die nächste Frage ist nun, wie sich Matrizen verändert, wenn man lineare Abbildungen verknüpft.

3.1 Linearkombination von Matrizen

Als erstes die Frage wie die darstellende Matrix $\underline{C}$ einer linearen Funktion $h := f + \lambda g$ aussieht, die durch linearkombination zweier anderer linearer Funktionen f und g entsteht.

Satz 3.2

Seien $\underline{A}$ und $\underline{B}$ darstellende Matrizen der linearen Funktionen f und g. Dann gilt für die Koeffizienten der Matrix $\underline{C}$, die die lineare Funktion $h := f + \lambda g$ darstellt:

$$c_{kl} = a_{kl} + \lambda b_{kl}$$

In Matrizenschreibweise

$$\underline{C} = \underline{A} + \lambda \underline{B}$$

Die Linearkombination von Matrizen erfolgt also Komponentenweise

3.2 Produkt von Matrizen

Die nächste Frage ist nun, was bei Komposition von linearen Abbildungen geschieht. Ist $\underline{C}$ nun wieder darstellende Matrix der Funktion $h := g \circ f$, $\underline{A}$ von f und $\underline{B}$ von g dann gilt für die Koeffizienten c_{ij}

$$c_{jl} = \sum_{k=1}^{m} b_{jk} a_{kl}$$

Man schreibt kurz

$$\underline{C} = \underline{BA}$$

3.3 Invertierbare Matrizen

Satz und Definition 3.3 *inverse Matrix*

Seien $\underline{A}$,$\underline{B} \in \mathrm{K}^{n \times n}$. Wenn $\underline{B}$ $\underline{A} = \underline{E}$, dann gilt auch $\underline{A}$ $\underline{B} = \underline{E}$. $\underline{B}$ ist eindeutig bestimmt, und $\underline{A}^{-1} := \underline{B}$ heißt die zu $\underline{A}$ inverse Matrix.

Lemma 3.4

$$(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}, \qquad (\underline{A}\ \underline{B}\ )^{-1} = \underline{B}^{-1} \underline{A}\ ^{-1}$$

3.4 Basiswechsel

Die nächste Frage ist nun, wie sich die Abbildungsmatrix $\underline{A}$ verändert, wenn man die Basis in V bzw. W wechselt. Sei $v_1, ..., v_n$ ein Basis von V, $v'_1, ..., v'_n$ eine weitere Basis von V. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix $\underline{S}$, die Koordinatentransformation von den neuen auf die alten Koordinaten beschreibt. Man legt $\underline{S}$ folgendermaßen fest.

$$\underline{\xi} = \underline{S}\underline{\xi}' \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{\xi}' = \underline{S}^{-1}\underline{\xi}$$

Analoge Überlegungen für W liefern dann den folgenden Satz.

Satz 3.5

Seien V, W $K-$VR mit dim V = n, dim W = m und $f : V \to W$ linear. Sei $\underline{A}$ die Abbildungsmatrix von f bzgl. der Basen v_i von V und w_j von W. Dann ist

$$\underline{A}' = \underline{T}^{-1}\underline{AS}$$

die Abbildungsmatrix bzgl. der Basis v'_i von V und w'_j in W. $\underline{S}$ und $\underline{T}$ beschreiben den Basiswechsel. Hinweis: Dabei bilden Matrizen immer vom neuen (gestrichenen) System in das alte (ungestrichene) ab, und die inversen vom der alten zur neuen Basis.

Lemma 3.6

$$\text{Rang}(\underline{\text{A}}\text{'}) = \text{Rang}(\underline{\text{A}}), \qquad \dim \text{Kern}(\underline{\text{A}}\text{'}) = \dim \text{Kern}(\underline{\text{A}})$$

Betrachtet man nun eine Koordinatentransformation bzw. einen Basiswechsel in V so ergibt sich für die Transformation der Abbildungsmatrix $\underline{\text{A}}$

Satz 3.7 *Basiswechsel für einen Endomorphismus*

Sei $V = W$, $v_i = w_i$ und $f \in \text{End}(V)$. Dann gilt

$$\underline{A}' = \underline{S}^{-1}\underline{AS}$$

3.5 lineare Gleichung

Satz 3.8

Sei $x_0 \in V$ eine Lösung der Gleichung $f(x_0) = b$ Dann gilt für die Lösungsmenge

$$f^{-1}(\{b\}) = x_0 + \text{Kern}(f)$$

Definition 3.9 *affiner Unterraum*

Seien V ein VR, $W \subset V$ ein UVR und $a \in V$, dann nennt man

$$a + V := \{a + x : x \in W\}$$

einen affinen Unterraum von V