Larissa Hammerstein Ferienkurs Lineare Algebra für Physiker
Musterlösung Montag WS 2008/09

Aufgabe 1 *Komplexe Zahlen–Lösung*

a) (i)

$$z = \frac{2+i}{3+4i} = \frac{(2+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i+3i+4}{3^2+4^2} = \frac{1}{25}(10-5i) = \frac{1}{5}(2-i)$$

(ii)

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = e^{4\cdot i\frac{\pi}{4}} = e^{i\pi} = -1$$

(iii)

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10} = \left(\frac{(1+i)^2}{1+1}\right)^1 0 = \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^1 0 = i^{10} = (-1)^5 = -1$$

b) (i)

$$\frac{z^5+3z^4-z-3}{z+3} = \frac{(z^4-1)(z+3)}{z+3} \Rightarrow z_m = e^{2\pi i\frac{m}{4}} = \begin{cases} e^{\frac{\pi}{2}i} \\ e^{\pi i} \\ e^{\frac{3\pi}{2}i} \\ e^{2\pi i} \end{cases}$$

(ii)

$$\frac{z^4-3z^3+3z^2-3z+2}{z^2-3z+2} = \frac{(z^2+1)(z-1)(z-2)}{(z-1)(z-2)} \Leftrightarrow z_{1,2} = \pm i$$

(iii)

$$\begin{aligned} & z^3+z^2+4z+4 = 0 \\ & (z^3+z^2+4z+4) : (z+1) = z^2+4 \\ -& \underline{(z^3+z^2)} \\ & \qquad\quad 4z+4 \\ & \qquad -\underline{(4z+4)} \\ & \qquad\qquad\quad 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= \frac{\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{\pm i\sqrt{16}}{2} = \pm 2i \\ &\Rightarrow z_1 = 2i,\ z_2 = -2i,\ z_3 = -1 \end{aligned}$$

c)
- falsch, $\mathbb{C}$ hat keine Anordnung
- richtig, da $|z| \in \mathbb{R}$
- falsch, diese Aussage gilt nur für reelle Polynome
- richtig
- falsch $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$

Aufgabe 2 *Skalarprodukte-Lösung*

a) In $\mathbb{R}^2$ ist $S(x,y) := x^T A y$ mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aufgrund des Matrizenprodukts eine Bilinearform und weiter ein Skalarprodukt $\Leftrightarrow$

(i) S ist symmetrisch $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow S(x,y) = S(y,x) \forall x, y \in \mathbb{R}^2$
Wegen $S\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = b$ und $S\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = c$ folgt notwendigerweise $b = c$. Für $b = c$ gilt aber: $A^T = A$ und

$$S(x,y) = x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T a x = S(y,x) \in \mathbb{R} \ \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

(ii) S ist positiv definit $\Leftrightarrow S(x,x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ und $S(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$S(x,x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + d x_2^2 \overset{!}{>} 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$$

Notwendig sind offenbar $a > 0$ und $d > 0$, da für $a \leq 0$ folgt $S\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = a \leq 0$ oder für $d \leq 0$ folgt $S\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = d \leq 0$ Widerspruch!
$\Rightarrow$ (quadr. Ergänzung) $S(x,x) = a\left[x_1^2 - 2x_1 \frac{b}{a} x_2\right] + d x_2^2 = a\left[x_1 + \frac{b}{a} x_2\right]^2 + \frac{ad-b^2}{a} x_2^2 \overset{!}{>} 0$ (*)
Notwendig ist weiter $\det A = ad - b^2 > 0$, da andernfalls für $x_1 = \frac{b}{a}$ und $x_2 = -1$ folgt $S(x,x) = \frac{ad-b^2}{a} \leq 0$ Widerspruch!
Andererseits ist $b = c$, $a > 0$ und $ad - b^2 > 0$ hinreichend für die Symmetrie und die positive Definitheit von S, da

$$S(x,x) = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x_1 + \frac{b}{a} x_2 = 0 \wedge x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

also S ist Skalarprodukt $\Leftrightarrow b = c, a > 0$ und $\det A = ad - b^2 > 0$

b) □ □ ■ □
■ □ ■ □
■ □ □ □
□ ■ ■ □
■ □ ■ □

c) Im $\mathbb{R}^n$ sei durch ein Skalarprodukt $S(X,Y)$ eine Norm $\|X\| = \sqrt{S(X,X)}$ gegeben. Dann gilt:

(i) $AC \perp BD \Leftrightarrow S(A-C, B-D) = 0 \Leftrightarrow S(A,B) - S(A,D) - S(C,B) + S(C,D) = 0$

(ii)

$$\begin{aligned}
& a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \\
& \Leftrightarrow \|A-B\|^2 + \|B-C\|^2 = \|A-B\|^2 + \|C-D\|^2 \\
& \Leftrightarrow S(A-D, A-D) + S(B-C, B-C) = S(A-B, A-B) + S(C-D, C-D) \\
& \Leftrightarrow S(A,A) - 2S(A,D) + S(D,D) + S(B,B) - 2S(B,C) + S(C,C) \\
& = S(A,A) - 2S(A,B) + S(B,B) + S(C,C) - 2S(C,D) + S(D,D) \\
& \Leftrightarrow S(A,B) - S(A,D) - S(B,C) + S(C,D) = 0
\end{aligned}$$

Vergleich von (i) und (ii) zeigt die Behauptung.

d)
- g ist für $f \neq$Nullabbildung keine Sesquilinearform, da

$$g(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \overline{f(x)} + f(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \overline{f(x)} + \lambda_1 f(y_1) + \lambda_2 f(y_2) \quad \text{und}$$

$$\lambda_1 g(x, y_1) + \lambda_2 g(x, y_2) = \lambda_1(\overline{f(x)} + f(y_1)) + \lambda_2(\overline{f(x)}, f(y_2)) = (\lambda_1 + \lambda_2)\overline{f(x)} + \lambda_1 f(y_1) + \lambda_2 f(y_2)$$

- g ist hermitesch, da $\overline{g(y,x)} = \overline{\overline{f(y)} + f(x)} = \overline{f(x)} + f(y) = g(x,y)$

- g ist nicht positiv definit, da $g(x,x) = f(x) + \overline{f(x)} = 2\mathrm{Re}f(x)$. Da f linear ist gilt:

  $$f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow \mathrm{Re}f(x) \text{ oder } \mathrm{Re}f(-x) \notin \mathbb{R}^+$$

- g ist kein Skalarprodukt auf V

- $$h(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \overline{f(x)} f(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$$
  $$= \lambda_1 \overline{f(x)} f(y_1) + \lambda_2 \overline{f(x)} f(y_2) = \lambda_1 h(x, y_1) + \lambda_2 h(x, y_2)$$

  $$h(\lambda x_1 + \lambda_2 x_2, y) = f(y)\overline{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)} = f(y)(\overline{\lambda_1 f(x_1)} + \overline{\lambda_2 f(x_2)})$$
  $$= \lambda_1 f(y)\overline{f(x_1)} + \overline{\lambda_2} f(y)\overline{f(x_2)} = \overline{\lambda_1} h(x_1, y) + \overline{\lambda_2} h(x_2, y)$$

  $\Leftrightarrow$ h ist Sesquilinearform

- h ist hermitesch, da $\overline{h(y,x)} = \overline{\overline{f(y)}f(x)} = \overline{f(x)}f(y) = h(x,y)$
- $s(x,x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \overset{*}{\Leftrightarrow} x = 0$ $\dim\mathrm{Kern}\,(f) + \dim\mathrm{Bild}(f) = 0 + 1 = \dim V$ Widerspr.
  $(\mathrm{Kern}(f) = \{0\} \wedge \mathrm{Bild}(f) = \mathbb{C} \Rightarrow V = \mathbb{C}$
  $(*)$ nur unter der Voraussetzung f injektiv und surjektiv. $\Leftrightarrow$ V ist 1-dimensional und $f(x) = \alpha x, \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

e)
- $s : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ ist ein Skalarprodukt $\Leftrightarrow$ s ist positiv definite hermitesche Sesquilinearform

  (i) s hermitesch $\Leftrightarrow \overline{s(y,x)} = s(x,y)$

  $$s(x,y) = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}) = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \overline{x}^T A y \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

  $$\overline{s(y,x)} = \overline{\overline{y^T} A x} = y^T \overline{A}\overline{x} = (y^T \overline{A}\overline{x})^T = \overline{x}^T \overline{A}^T y \overset{!}{=} s(x,y)\ \forall x, y$$
  $$\Leftrightarrow \overline{A}^T = A \Leftrightarrow A^T = \overline{A} \text{ (betrachte kanonische Basis!)}$$

  (ii) s Sesquilinearform $\Leftrightarrow s(x, \lambda y + \mu z) = \lambda s(x,y) + \mu s(x,z) \wedge s(\lambda x + \mu y, z) = \overline{\lambda} s(x,z) + \overline{\mu} s(y,z)$

  $$s(x, \lambda y + \mu z) = \overline{x}^T A(\lambda y + \mu z)$$
  $$= \overline{x}^T A \lambda y + \overline{x}^T A \mu z = \lambda s(x,z) + \mu s(y,z)$$

  (iii) s ist positiv definit $\Leftrightarrow s(x,x) \geq 0\ \forall\ x \in \mathbb{C} \wedge s(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  $$s(x,x) = [x_1\overline{x_1} - i x_1 \overline{x_2} + i\overline{x_1} x_2] + 2x_2\overline{x_2} + i x_2 \overline{x_3} - i x_3 \overline{x_2} + 2x_3\overline{x_3}$$

  $$\overset{*}{=} [(x_1 + i x_2)(\overline{x_1} - i\overline{x_2}) - x_2\overline{x_2}] + 2x_2\overline{x_2} + i x_2\overline{x_3} - i x_3 \overline{x_2} + 2x_3\overline{x_3}$$

  $$= x_1'\overline{x_1}' + [x_2\overline{x_2} + i x_2 \overline{x_3} - i x_3 \overline{x_2}] + 2x_3\overline{x_3}$$

  $$= x_1\overline{x_1}' + [(x_2 - i x_3)(\overline{x_2} + i\overline{x_3}) - x_3\overline{x_3}] + 2x_3\overline{x_3}$$

  $$= x_1\overline{x_1}' + x_2'\overline{x_2}' + x_3\overline{x_3} \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{C}^3! \text{ Beachte } s(x,x) \in \mathbb{R}!$$

  $$s(x,x) = 0 \Leftrightarrow x_1' = x_1 + i x_2 = 0 \wedge x_2' = x_2 - i x_3 = 0 \wedge x_3 = 0 \Leftrightarrow x = 0!$$

  $(*)$ Suche $x_1' = x_1 + \beta_2 x_2 + \beta 3 x_3$ so, dass alle gemischten Glieder mit x_1 oder $\overline{x_1}$ in $x_1' \cdot \overline{x_1}'$ enthalten sind!
  $x_1'\overline{x_1}' = (x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3)(\overline{x_1} + \overline{\beta_2}\overline{x_2} + \overline{\beta_3}\overline{x_3}) = x_1\overline{x_1} + \overline{\beta_2} x_1 \overline{x_2} + \beta_2 x_2 \overline{x_1} + \overline{\beta_3} x_1 \overline{x_3} + \beta_3 x_3 \overline{x_1} + \beta_2\overline{\beta_3} x_2\overline{x_3} + \overline{\beta_2}\beta_3 x_3 \overline{x_2} + \beta_2\overline{\beta_2} x_2 \overline{\beta 2} x_2 \overline{x_2} + \beta_3 \overline{\beta 3} x_3 \overline{x_3}$
  Beachte: $s(x,y) = x^T A y$ mit $A^T = \overline{A}$ ist positiv definit $\Rightarrow a_{ii} > 0$, da sonst $s(e_i, e_i) = a_{ii} \leq 0 \Rightarrow$ alle gem. Glieder $x_i\overline{x_j}$ und $x_j\overline{x_i}$ mit $j > i$ lassen sich in $x_i'\overline{x_i}'$ stecken!

(iv) $\|b-a\|_s = \sqrt{s(b-a,b-a)} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1+i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1+i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 3i+1 \\ 3-2i \end{pmatrix}} =$
$\sqrt{3-i+3-2i+3i+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
Aufgrund der CSU $0 \leq \frac{|s(a,b)|}{\|a\|_s \cdot \|b\|_s} \leq 1$ kann man den beiden Vektoren a und b den Winkel $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mit $\cos\varphi = \frac{|s(a,b)|}{\|a\|_s \cdot \|b\|_s}$ zuordnen.

$$\|a\|_s = \sqrt{s(a,a)} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}} = \sqrt{3}$$

$$\|b\|_s = \sqrt{s(b,b)} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}} = 3$$

$$s(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = 2-3i \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\|s(a,b)\|}{\|a\|_s \cdot \|b\|_s} = \frac{\sqrt{4+9}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{13}}{3\sqrt{3}}$$

Beachte: $s(b,a) = \overline{s(a,b)}$

(v) Gesucht: $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ mit

$$s(v,a) = \overline{v}^T \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow v_1 + (1+i)v_2 - 2iv_3 = 0$$

$$s(v,b) = \overline{v}^T \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow v_3 = 0,\ v_2 = -\lambda \in \mathbb{C}!,\ v_1 = (1+i)\lambda \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{C}$$

Aufgabe 3 *Normen-Lösung*

Mit $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ gilt jeweils mit $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v| \ \forall u, v \in \mathbb{R}$

- $\|\cdot\|_1$: Definitheit: $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \ \forall i \Leftrightarrow x = 0$

  Positivität: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0$ (klar)

  Homogenität: $\|\alpha x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\alpha| \|x\|_1$

  Dreiecksungleichung: $\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$

- $\|\cdot\|$: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ (Standardskalarprodukt)

  Definitheit: $\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \ \forall i \Leftrightarrow x = 0$

  Positivität: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \geq 0$ (klar)

  Homogenität: $\|\alpha x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha x_i)^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\alpha| \|x\|_2$

  Dreiecksungleichung: $\|x+y\|_2^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq (\text{CSU}) \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$

- $\|\cdot\|$: Definitheit: $\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max\limits_{1\le i\le n} |x_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = 0\ \forall i \Leftrightarrow x = 0$
  Positivität: $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i| \ge 0$ (klar)
  Homogenität: $\|\alpha x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |\alpha x_i| = |\alpha| \max\limits_{1\le i\le n} |x_i| = |\alpha| \|x\|_\infty$ Dreiecksungleichung: $\|x+y\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i + y_i| \le \max\limits_{1\le i\le n} (|x_i| + |y_i|) \le \max\limits_{1\le i\le n} |x_i| + \max\limits_{1\le i\le n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

Aufgabe 4 *Vektorräume-Lösung*

a) ☐ $(V\backslash\{0\}, \cdot)$ ist kommutative Gruppe (in V gibt es keine Multiplikation $V \times V \to V$)
☐ $(K, \cdot)$ ist kommutative Gruppe ($0 \in K$ besitzt in K kein inverses Element)
■ $\forall \lambda, \mu \in K,\ \forall v \in V$ gilt $(\lambda\mu) \cdot v = \mu(\lambda v)$
☐ $\forall \lambda, \mu \in K,\ \forall v \in V$ gilt $\lambda(v + \mu) = \lambda v + \lambda \mu$ (Vektor + Skalar nicht definiert)
■ $\forall \lambda \in K,\ \forall v, w \in V$ gilt $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
☐ $\forall \lambda \in K,\ \forall v \in V$ gilt $\lambda v = v\lambda$ (Vektor $\cdot$ Skalar (von rechts) nicht definiert)
■ $\forall \lambda\mu \in K,\ \forall v \in V$ gilt $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
■ $\forall v \in V$ gilt $(-1)_V v = -v$ $(v + (-1)_V v = 1_V v + (-1)_V v = (1 + (-1))_V v = 0_V v = 0_V$

b) Zu prüfen ist jeweils das Untervektorraum-Kriterium:

- $W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$ ist Untervektorraum, da
  (i) $W \neq \emptyset$, da $(0,0,0) \in W$
  (ii) $(+)$ abgeschlossen, da für $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in W$ gilt:
  $$x_1 = x_2 = 2x_3 \wedge y_1 = y_2 = 2y_3 \Rightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = 2x_3 + 2y_3 = 2(x_3 + y_3)$$
  $$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in W$$
  (iii) $(\cdot)$ abgeschlossen, da für $(x_1, x_2, x_3) \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
  $$x_1 = x_2 = 2x_3 \Rightarrow \lambda x_1 = \lambda x_2 = 2\lambda x_3 \Rightarrow \lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \in W$$
- $W := \{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 | \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ ist kein Untervektorraum, da $\forall (x, y) \in W$ gilt $y \ge 0$ speziell $(1,1) \in W$, aber skalare Multiplikation mit $(-1) \in \mathbb{R}$ liefert $(-1)(1,1) = (-1,-1) \notin W$, d.h. $(\cdot)$ ist nicht abgeschlossen
- $W := \{f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\} \subset Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist Untervektorraum
  (i) $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ (Nullfunktion) liegt in $W \Rightarrow W \neq \emptyset$
  (ii) $f, g \in W:\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x)\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (f+g) \in W$
  (iii) $f \in W,\ \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda f(-x) = (\lambda f)(x) \forall x \in \mathbb{R}$
- $W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 \ge x_2\} \subset \mathbb{R}^3$ ist kein Untervektorraum, da z.B. $(1,0,0) \in W$, aber $(-1)(1,0,0) = (-1,0,0) \notin W$, d.h. $(\cdot)$ ist nicht abgeschlossen.

Aufgabe 5 *lineare Unabhängigkeit und Basen-Lösung*

a) Ordnet man b_1, b_2, b_3 als Zeilen zu einer Matrix an, so hat diese den Rang $3 = \dim \mathbb{R}^3$, wie elementare Zeilenumformungen zeigen:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{I-II}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{II und III vertauschen}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Das heißt b_1, b_2, b_3 ist ein minimales Erzeugendensystem bzw. maximales linear unabhängiges System, also eine Basis.

b) - v ist Linearkombination von n Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ (Vektorraum über K), $n \in \mathbb{N}$
  $$\Leftrightarrow v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \text{ mit } \lambda_i \in K$$
  Durch Vergleich der Komponenten der Vektoren erkennt man beispielsweise:
  $$v_1 = v_2 + v_4, v_2 = v_1 - v_4, v_3 = v_2 - v_5, v_4 = v_1 - v_2, v_5 = v_2 - v_3, v_6 = v_2 + v_3$$

- - ■ span(v_2, v_3, v_5) =span(v_3, v_5)
    Wegen $v_2 = v_3 + v_5 \Rightarrow v_2, v_3, v_5 \in$span$(v_3, v_5) \Rightarrow$span$(v_2, v_3, v_5) \subseteq$span$(v_3, v_5)$.
    Umgekehrt gilt sicher: span$(v_2, v_3, v_5) \supseteq$span$(v_3, v_5)$, also insgesamt: span$(v_2, v_3, v_5)$ =span(v_3, v_5).
  - ■ span(v_1, v_5, v_6) =span$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$
    Wegen $v_2 = \frac{1}{2}(v_5 + v_6), v_3 = \frac{1}{2}(v_6, v_5)$ und $v_4 = v_1 - v_2 = v_1 - \frac{1}{2}(v_5 + v_6)$ gilt:
    span$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) \subseteq$span$(v_1, v_5, v_6)$. Umgekehrt gilt offensichtlich auch
    span$(v_1, v_5, v_6) \subseteq$span$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$, also folgt Gleichheit.
    Anmerkung: Dass v_4 eine Linearkombination von v_1, v_5, v_6 ist, kann man auch mittels Ansatz $v_4 = \lambda v_1 + \mu v_5 + \nu v_6$ bestimmen.
  - □ span(v_2, v_3, v_5) =span(v_1, v_3, v_5)
    Nach 1. gilt: span(v_2, v_3, v_5) =span(v_3, v_5), aber $v_1 \notin$span(v_3, v_5), da der Ansatz $\lambda v_3 + \mu v_5 = v_1$ zum Widerspruch führt.
  - □ span(v_1, v_2, v_4) =span(v_2, v_3, v_5, v_6)
    Wegen $v_5 = v_2 - v_3$ und $v_6 = v_2 + v_3$ gilt span(v_2, v_3, v_5, v_6) =span(v_2, v_3), aber $v_1 \notin$span(v_2, v_3), da v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, bzw. der Ansatz $\lambda v_2 + \mu v_3 = v_1$ zum Widerspruch führt.
- Um eine Basis des Untervektorraums (?) U =span$(v_1, v_2, \ldots, v_6$ anzugeben, müssen wir eine minimale Teilfamilie B von $\{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$ mit span$B$ =span$(v_1, \ldots, v_6)$ angeben. Für die Vektoren v_4, v_5, v_6 gilt $v_4 = v_1 - v_2, v_5 = v_2 - v_3, v_6 = v_2 + v_3$. Somit gilt span$(v_1, \ldots, v_6)$ =span(v_1, v_2, v_3). Nun ist noch die lineare Abhängigkeit der drei Vektoren v_1, v_2 und v_3 zu untersuchen. Wir vermuten, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind, und zeigen dazu, dass diese nur eine triviale Linearkombination des Nullvektors bilden:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

  Somit sind die drei Vektoren linear unabhängig und $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine minimale Teilfamilie mit span$B$ = span$(v_1, \ldots, v_6)$. Also ist B eine Basis des Untervektorraumes U, der ein drei-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 6 *Gram-Schmidt-Verfahren-Lösung*

a) - Gegeben: d linear unabhängige Vektoren $a_1, \ldots, a_d$
   Gesucht: Orthonormalsystem $\{b_1, \ldots, b_d\}$ mit span$(b_1, \ldots, b_k)$ =span$(a_1, \ldots, a_k)$ für $1 \leq k \leq d$

$$\|a_1\|^2 = \langle a_1, a_1 \rangle = 4 \Rightarrow b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b_2} = a_2 - \langle a_2, b_1 \rangle b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\tilde{b_2}\|^2 = 16 \Rightarrow b_2 = \frac{\tilde{b_2}}{\|\tilde{b_2}\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   [span(b_1, b_2) =span(a_1, a_2)]

$$\tilde{b_3} = a_3 - \langle a_3, b_1 \rangle b_1 - \langle a_3, b_2 \rangle b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\tilde{b_3}\|^2 = 4 \Rightarrow b_3 = \frac{\tilde{b_3}}{\|\tilde{b_3}\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   [span(b_1, b_2, b_3) =span(a_1, a_2, a_3)]

- **Erster Weg:** Suche $b_4 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \backslash \{0\}$ so, dass $\langle b_k, b_4 \rangle = b_k^T b_4 = 0,\ 1 \leq k \leq 3 \wedge \|b_4\| = 1 \Rightarrow$ LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcr} \delta & = & \mu \\ \gamma & = & -\mu \\ \beta & = & -\mu \\ \alpha & = & \mu \end{array}$$

$$\Rightarrow b_4 = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \wedge \|b_4\|^2 = 4\mu^2 \overset{!}{=} 1 \Leftrightarrow \mu = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow b_4 = \pm\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zweiter Weg: Ergänze $\{a_1, a_2, a_3\}$ z.B. um $a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und orthonormalsiere wie oben.

$$\tilde{b_4} = a_4 - \langle a_4, b_1\rangle b_1 - \langle a_4, b_2\rangle b_2 - \langle a_4, b_3\rangle b_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\tilde{b_4}\|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b_4 = \frac{\tilde{b_4}}{\|\tilde{b_4}\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Gram/Schmidt-Verfahren mit den Vektoren $b_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $b_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & i \end{pmatrix}^T$ und $b_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & i \end{pmatrix}^T$

$$q_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} b_1$$

$$\tilde{q_2} = b_2 - \langle b_2, q_1\rangle q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \Rightarrow q_2 = \frac{\tilde{q_2}}{\|\tilde{q_2}\|} = \tilde{q_2}$$

$$\tilde{q_3} = b_3 - \langle b_3, q_1\rangle q_1 - \langle b_3, q_2\rangle q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q_3 = \frac{\tilde{q_3}}{\|\tilde{q_3}\|} = \tilde{q_3}$$

$\Rightarrow \{q_1, q_2, q_3\}$ bilden eine Basis des span(b_1, b_2, b_3), womit b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind.
Ergänze q_1, q_2, q_3 zu einer ONB des $\mathbb{C}^4$ durch $q_4 = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T$ mit

$$q_4 \perp q_1 \Leftrightarrow \langle q_4, q_1\rangle = q_4^T \overline{q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha \ \wedge$$

$$q_4 \perp q_2 \Leftrightarrow \langle q_4, q_2\rangle = q_4^T \overline{q_2} = -i\delta = 0 \Leftrightarrow \delta = 0 \ \wedge$$

$$q_4 \perp q_3 \Leftrightarrow \langle q_4, q_3\rangle = q_4^T \overline{q_3} = -i\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0 \ \wedge$$

$$\|q_4\| = 1 \Leftrightarrow \langle q_4, q_4\rangle = q_4^T \overline{q_4} = 2\alpha\overline{\alpha} = 1 \Leftrightarrow |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow q_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$$

Bemerkung: Die Orthonormalbasis hängt von der Wahl der Reihenfolge der den Span aufspannenden Vektoren ab, die man meist geeignet wählen kann. Wählen Sie z.B. die Reihenfolge b_2, b_3, b_1!

Aufgabe 7 *orthogonale Projektion-Lösung*

Erstellen einer Orthonormalbasis von U:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{b_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Senkrechte Projektion:

$$P_U(v) = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Länge $\|P_U(v) - v\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$